Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA P3

26 de novembro de 2013

Questão 1

Um fóton com energia igual à energia de repouso do elétron sofre espalhamento Compton. O ângulo de espalhamento do fóton é tal que a energia cinética do elétron após a colisão é máxima.

(a) (1,0 ponto) Qual é o ângulo de espalhamento do fóton após a colisão? Justifique.

(b) (0,5 ponto) Determine a diferença entre os comprimentos de onda do fóton espalhado e incidente. Expresse sua resposta em termos da constante de Planck, da massa de repouso do elétron e da velocidade da luz.

(c) (1,0 ponto) Determine a razão R entre os comprimentos de onda do fóton depois e antes da colisão. A resposta deve ser numérica.

Solução da questão 1

(a) A energia cinética do elétron é

$$E_{cin} = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'},$$

onde λ e λ' são respectivamente os comprimentos de onda do fóton antes e depois da colisão. Desta relação vemos que a energia cinética do elétron é máxima quando λ' for máximo. A relação entre λ e λ' é

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Portanto, <u>λ' e E_{cin} serão máximos para $\theta = \pi$</u>.

(b) O deslocamento do comprimento de onda do fóton é

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\pi) \Longrightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{2h}{mc}}.$$

(c) No espalhamento considerado no problema a energia cinética do fóton é igual à energia de repouso do elétron portanto

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = mc^2 \Longrightarrow \lambda = \frac{h}{mc}.$$

Mostramos no item (b) que

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc} \Longrightarrow \lambda' = 3\lambda \Longrightarrow \boxed{\frac{\lambda'}{\lambda} = 3}.$$

Questão 2

Luz ultravioleta com comprimento de onda na faixa 120 nm $\leq \lambda \leq$ 400 nm atravessa um tubo transparente preenchido com gás hélio ($Z = 2$), ionizado uma vez (He^+).

(a) (0,5 ponto) Determine o intervalo de energia dos fótons incidentes em eV.

(b) (1,0 ponto) Adotando o modelo de Bohr, e supondo que o átomo está no estado excitado com $n = 2$, qual é maior comprimento de onda $\lambda_{\text{máx}}$ da luz incidente absorvida pelo gás?

(c) (1,0 ponto) Determine o módulo da variação do momento linear $|\Delta\vec{p}|$ do He^+ ao absorver um desses fótons de comprimento de onda $\lambda_{\text{máx}}$. Dê a resposta em kg·m/s.

Solução da questão 2

(a) A energia do fóton E_γ é

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1230}{\lambda}\ \text{eV}\cdot\text{nm}$$

Assim,

$$\boxed{3{,}1\ \text{eV} \leq E_\gamma \leq 10\ \text{eV}}.$$

(b) O átomo pode absorver fótons com energia igual às diferenças de energia entre o estado com $n = 2$ e os estados com $n > 2$.

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = 13,6Z^2\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right]\ \text{eV}.$$

Para $n = 3$, $E_\gamma = 7,6$ eV; para $n = 4$, $E_\gamma = 10,2$ eV. Para $n > 4$ a energia cai fora do intervalo do item (a). O comprimento de onda máximo é obtido com a energia mínima e vale

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{1230}{7,6} = 1,6 \times 10^2\ \text{nm}.$$

(c) O módulo da variação do momento do elétron é igual ao módulo do momento do fóton absorvido.

$$|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}_\gamma| = \frac{h}{\lambda_{\text{máx}}} = \frac{(4,1\times10^{-15})(1,6\times10^{-19})}{1,6\times10^{-7}} = 4,1\times10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

Questão 3

(I) (1,5 ponto) Considere a função de onda do estado fundamental do átomo de hidrogênio $\Psi_{1s}(r,t) = \psi_{1s}(r)e^{-iE_1t/\hbar}$, onde

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

e a_0 é o raio de Bohr. Para o átomo de H no estado fundamental calcule a probabilidade de encontrar o elétron a uma distância menor do que o raio de Bohr.

(II) (1,0 ponto) Considere o movimento unidimensional de uma partícula em que a incerteza na medida de sua posição seja igual a $\lambda/(2\pi)$, onde λ é o comprimento de onda de de Broglie associado. Determine a mínima incerteza relativa $\Delta p/p$ na medida do momento p desta partícula, efetuada simultaneamente à medida da posição.

Solução da questão 3

(I) A probabilade de encontrar o elétron numa casca esférica de raio r e espessura dr no estado fundamental do H é

$$P(r)dr = 4\pi r^2 |\psi_{1s}(r)|^2 dr = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0} dr.$$

Portanto, a probabilidade de achar o elétron a uma distância menor do que a_0 é

$$P(r < a_0) = \int_0^{a_0} \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0} dr = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{2}(x^2+x+2)e^{-x}|_0^2 = 1-5e^{-2} \approx 0,32.$$

(II) É dado que a incerteza na posição da partícula é da ordem do comprimento de onda de Broglie:

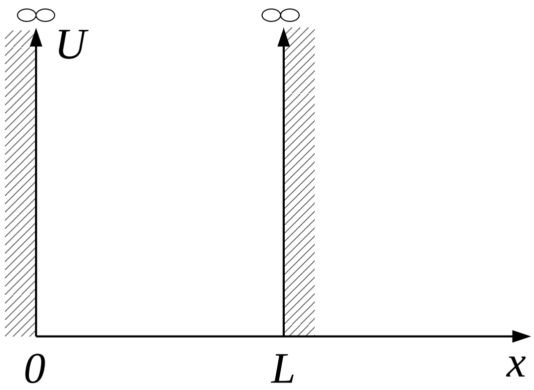
$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p}.$$

A relação de incerteza de Heisenberg fornece Δp

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar p}{2\hbar} \Longrightarrow \frac{\Delta p}{p} \geq \frac{1}{2}.$$

Questão 4

A dinâmica de uma partícula subatômica de massa m pode ser estudada modelando-a confinada em um poço unidimensional de largura L como mostra a figura.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger para esta partícula com energia E no poço.

(b) (1,0 ponto) Obtenha, resolvendo a equação do item (a), as funções de onda normalizadas ψ_n.

(c) (1,0 ponto) Qual é a separação ΔE em enegia entre os estados da partícula correspondentes aos dois níveis mais baixos de energia nesse poço?

Solução da questão 4

(a) A equação de Schrödinger na região $0 < x < L$ se escreve como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

(b) Multiplicando a equação do item (a) por $2m/\hbar$ obtemos

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi,$$

onde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. A solução geral pode ser escrita como

$$\psi(x) = A\,\mathrm{sen}\,(kx) + B\cos(kx).$$

Impondo as condições de contorno obtemos:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0; \quad \psi(L) = 0 = A\,\mathrm{sen}\,(kL) \Rightarrow kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Portanto,

$$\psi_n(x) = A\,\mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x).$$

Determinamos a constante A normalizando a função de onda:

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1 \Longrightarrow \int_0^L A^2\,\mathrm{sen}^2(\frac{n\pi}{L}x)dx = 1 \Longrightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)}.$$

(c) Primeiramente determinamos a energia E através de k.

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Longrightarrow E_n = \frac{h^2n^2}{8mL^2}.$$

Logo

$$\boxed{\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3h^2}{8mL^2}}.$$

Formulário

$h = 4,1 \times 10^{-15}\text{eV}\cdot\text{s}, \qquad c = 3,0 \times 10^{8}\text{m/s}, \qquad 1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{J},$

$E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc, \quad L = n\hbar, \quad \lambda = \dfrac{h}{p}, \quad \lambda' = \lambda + \dfrac{h}{mc}(1-\cos\theta),$

$\Delta p_x\, \Delta x \geq \hbar/2, \quad \Delta E\, \Delta t \geq \hbar/2, \quad \hbar = h/(2\pi),$

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$

$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar,\ L_z = m_\ell\,\hbar,\ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar,\ S_z = m_s\,\hbar, \quad E_n = -13,6\dfrac{Z^2}{n^2}\text{ eV},$

$\int e^{-x}dx = -e^{-x}, \quad \int xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}, \quad \int x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x},$

$\int \text{sen}^2(x)dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\text{sen}\,(2x)}{4}, \qquad \int \cos^2(x)dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\text{sen}\,(2x)}{4}.$