Física IV - 4320402

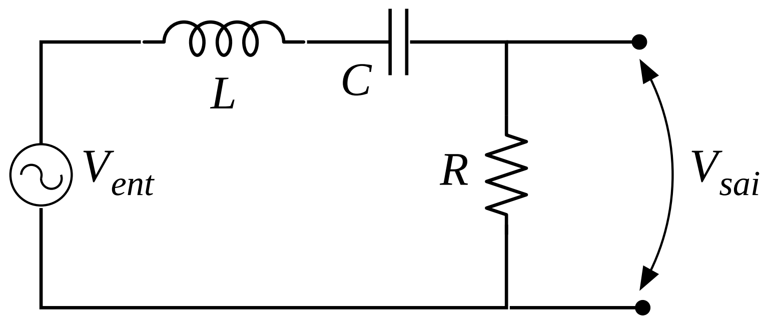
Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA PR

4 de fevereiro de 2014

Questão 1

Em um circuito RLC, a corrente é dada por $i(t) = I\cos(\omega\, t)$ e a voltagem da fonte por $v(t) = V_{ent}\cos(\omega\, t + \phi)$.



(a) (1,0 ponto) Calcule V_{sai}/V_{ent}, onde V_{sai} é a amplitude da voltagem no resistor, em função de R, L, C e ω.

(b) (1,0 ponto) Calcule a frequência angular de ressonância. Esboce o diagrama V_{sai}/V_{ent} em função de ω, indicando a posição da frequência angular de ressonância.

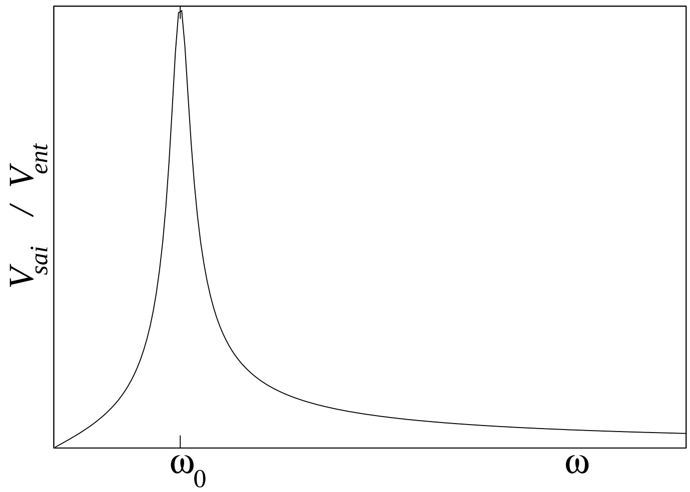
(c) (0,5 ponto) Determine a defasagem ϕ da voltagem da fonte em relação à corrente quando o circuito está em uma situação de ressonância.

Solução da questão 1

(a) As amplitudes das voltagens de entrada e saída são

$$V_{sai} = RI\,, \quad V_{ent} = ZI \Longrightarrow \boxed{\frac{V_{sai}}{V_{ent}} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}}$$

(b) No gráfico $V_{sai}/V_{ent} \times \omega$ esboçado abaixo ω_0 é a frequência de ressonância, obtida através da equação $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C) \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$.



(c) Na ressonância $X_L = \omega_0 L = X_C = 1/(\omega_0 C)$. Assim, $\tan\phi = \tan(X_L - X_C)/R = 0 \Longrightarrow \boxed{\phi = 0}$ e portanto não há defasagem entre a corrente e a voltagem.

Questão 2

O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana no vácuo é dado por

$$\vec{E}(x,t) = E_m \cos(ax - bt)\,\widehat{\jmath}$$

com $a > 0$ e $b > 0$.

(a) (0,5 ponto) Calcule a relação existente entre as constantes a e b sabendo-se que o campo elétrico satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

<u>Use a lei de Faraday</u>, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, para resolver os itens (b) e (c) abaixo.

(b) (1,0 ponto) Determine a direção do campo magnético.

(c) (1,0 ponto) Calcule a expressão do vetor campo magnético (dê sua resposta em termos de E_m, c, a, b, x e t).

<u>Dado:</u> $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) As derivadas segundas aplicadas a $\vec{E}(x,t) = E_m \cos(ax - bt)\widehat{\jmath}$ são

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -a^2 E_m \cos(ax - bt)\widehat{\jmath}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -b^2 E_m \cos(ax - bt)\widehat{\jmath}.$$

Para que a equação de onda seja satisfeita devemos ter $\boxed{b = ac}$.

(b) A lei de Faraday fornece

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x}\widehat{k} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad \text{(I)}\,.$$

A equação acima é uma equação vetorial. As componentes x e y fornecem

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0.$$

Como $\vec{B}$ só depende de x e t na combinação $ax - bt$, independência em t implica em independência em x. Portanto, B_x e B_y podem ser escolhidos nulos e <u>o campo magnético da onda está ao longo da direção z: $\vec{B} = B_z \widehat{k}$</u>.

(c) A componente z da equação (I) do item (b) é

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial(ax - bt)}{\partial x}\frac{dE_y}{d(ax - bt)} = -\frac{\partial(ax - bt)}{\partial t}\frac{dB_z}{d(ax - bt)}$$

$$\Longrightarrow a\frac{dE_y}{d(ax - bt)} = b\frac{dB_z}{d(ax - bt)} \Longrightarrow B_z = \frac{a}{b}E_y = \frac{1}{c}E_y,$$

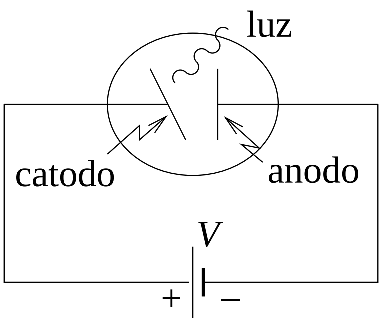
onde usamos o resultado do item (a) e colocamos a constante de integração igual a zero. Finalmente,

$$\boxed{\vec{B}(x,t) = \frac{E_m}{c}\cos(ax - bt)\widehat{k}}.$$

Questão 3

(I) (1,0 ponto) Calcule a potência irradiada por uma pessoa com 1,8 m^2 de área cujo corpo está a uma temperatura de 37°C. Qual é comprimento de onda no qual esta pessoa irradia predominantemente? Obs: aproxime a emissão térmica de uma pessoa pela de um corpo negro.

(II) Luz de frequência f incide sobre o catodo de uma célula fotoelétrica. Os elétrons emitidos pelo catodo são <u>freiados</u> através de uma diferença de potencial de V volts. A corrente através do circuito cessa quando $V = V_0$ (potencial de corte).



(a) (1,0 ponto) Use a conservação de energia para obter V_0 em função da frequência f, da função de trabalho do material do catodo, do módulo da carga do elétron e e da constante de Planck h.

(b) (0,5 ponto) A partir do gráfico $V_0 \times f$ como podem ser obtidas a função de trabalho e a constante de Planck?

Solução da questão 3

(I) A potência por unidade de área emitida por um corpo na temperatura T é dada pela lei de Stefan-Botzmann: $P = \sigma T^4$. Portanto a potência total irradiada pela pessoa é

$$P_{total} = PA = \sigma T^4 A = (5,7 \times 10^{-8})(273+37)^4(1,8) = 9,5 \times 10^2 \text{ W}.$$

O comprimento de onda predominante é dada pela lei de deslocamento de Wien.

$$\lambda_{máx} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{T} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{273+37} = 9,4 \times 10^{-6} \text{ m} = 9,4 \times 10^3 \text{ nm (infravermelho).}$$

(II) Célula Fotoelétrica.

(a) O elétron é emitido com um energia cinética $E_{cin} = hf - \phi$, onde ϕ é a função de trabalho. Denominando V_A o potencial no anodo e V_C o potencial do catodo, $V_C - V_A = V_0$ e a conservação de energia fornece.

$$eV_C + E_{cin} = eV_A \Longrightarrow e(V_C - V_A) = hf - \phi \Longrightarrow \boxed{V_0 = \frac{hf}{e} - \frac{\phi}{e}}.$$

(b) A intersecção da reta $V_0 \times f$ com o eixo das frequências ($V_0 = 0$) fornece a função de trabalho dividida pela constante de Planck. O coeficiente angular da reta fornece a constante de Planck dividida pelo módulo da carga do elétron.

Questão 4

(I) A função de onda

$$\psi(x) = Axe^{-\alpha x^2/2}, \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar} > 0,$$

é uma solução da equação de Schrödinger do oscilador harmônico unidimensional. A energia potencial do oscilador é dada por $U = \dfrac{m\omega^2 x^2}{2} \equiv \dfrac{\hbar^2\alpha^2 x^2}{2m}$.

(a) (1,0 ponto) Determine a energia do oscilador que se encontra no estado descrito pela função de onda ψ.

(b) (0,5 ponto) Calcule a constante de normalização A.

Sugestão: nos itens (a) e (b) deixe todas as expressões em função de α e só substitua α por seu valor nos resultados finais.

(II) (1,0 ponto) Escreva a configuração eletrônica do átomo do sódio ($Z = 11$) e os números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s para cada elétron.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(I) Oscilador harmônico unidimensional.

(a) A equação de Schrödinger do oscilador harmônico unidimensional é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{\hbar^2\alpha^2x^2}{2m}\psi(x)=E\psi(x)$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{d\psi(x)}{dx}&=Ae^{-\alpha x^2/2}-A\alpha x^2e^{-\alpha x^2/2},\\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}&=-A\alpha xe^{-\alpha x^2/2}-2A\alpha xe^{-\alpha x^2/2}+A\alpha^2x^3e^{-\alpha x^2/2}\\ &=-3A\alpha xe^{-\alpha x^2/2}+A\alpha^2x^3e^{-\alpha x^2/2}.\end{aligned}$$

Substituindo na equação de Schrödinger obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-3A\alpha xe^{-\alpha x^2/2}+A\alpha^2x^3e^{-\alpha x^2/2}\right)+\frac{\hbar^2\alpha^2x^2}{2m}Axe^{-\alpha x^2/2}=EAxe^{-\alpha x^2/2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E=\frac{3\hbar^2\alpha}{2m}=\frac{3\hbar^2m\omega}{2m\hbar}=\frac{3\hbar\omega}{2}}.$$

A função ψ é a função do primeiro estado excitado do oscilador.

(b) A constante de normalização é obtida através da equação $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx=1$. No nosso caso,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}A^2x^2e^{-\alpha x^2}dx=A^2\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}=1\Longrightarrow\boxed{A=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4}}.$$

(II) A configuração eletrônica é $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$. Os números quânticos dos elétrons são:

$$\begin{aligned}&1s^2: && n=1, && \ell=0, && m_\ell=0, \quad m_s=\pm1/2\\ &2s^2: && n=2, && \ell=0, && m_\ell=0, \quad m_s=\pm1/2\\ &2p^6: && n=2, && \ell=1, && \begin{cases}m_\ell=-1, \quad m_s=\pm1/2\\ m_\ell=0, \quad m_s=\pm1/2\\ m_\ell=1, \quad m_s=\pm1/2\end{cases}\\ &3s^1: && n=3, && \ell=0, && m_\ell=0, \quad m_s=1/2\end{aligned}$$

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda; \quad E_{cin}^{max} = hf - \phi,$

$I_{total} = \sigma T^4; \quad \sigma = 5,7 \times 10^{-8}\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}\ ; \quad \lambda_{máx} T = 2,9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}\ ;$

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$

$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar,\ L_z = m_\ell\,\hbar,\ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar,\ S_z = m_s\,\hbar,$

$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \dfrac{1}{2a}, \quad \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}.$