Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA PS

3 de dezembro de 2013

Questão 1

Uma onda eletromagnética plana harmônica, de comprimento de onda λ, propaga-se no vácuo no sentido positivo do eixo z. Seu campo elétrico oscila na direção x e atinge o seu valor máximo E_0 em $z = 0$ no instante $t = 0$. As respostas devem envolver apenas λ, E_0, A (definida no item (d)) e as constantes fundamentais c e ϵ_0.

(a) (0,5 ponto) Determine a expressão do vetor campo elétrico da onda.

(b) (0,5 ponto) Determine a expressão do vetor campo magnético da onda.

(c) (0,5 ponto) Determine o vetor de Poynting.

(d) (0,5 ponto) Calcule a energia W incidente durante um período da onda sobre uma superfície plana de área A orientada normalmente ao eixo z.

(e) (0,5 ponto) Calcule o vetor momento $\vec{P}$ transferido durante um período da onda a esta mesma superfície sabendo-se que a energia W incidente é totalmente absorvida.

Solução da questão 1

(a) Campo elétrico

$$\boxed{\vec{E} = \widehat{\imath} E_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right]}$$

(b) Campo magnético

$$\vec{B} = \frac{\widehat{k} \times \vec{E}}{c} = \boxed{\widehat{\jmath}\frac{E_0}{c} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right]}$$

(c) Vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \boxed{\widehat{k}\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right]}$$

(d) Intensidade

$$\boxed{I = \left|\langle\vec{S}\rangle\right| = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 c}.$$

Energia incidente num período

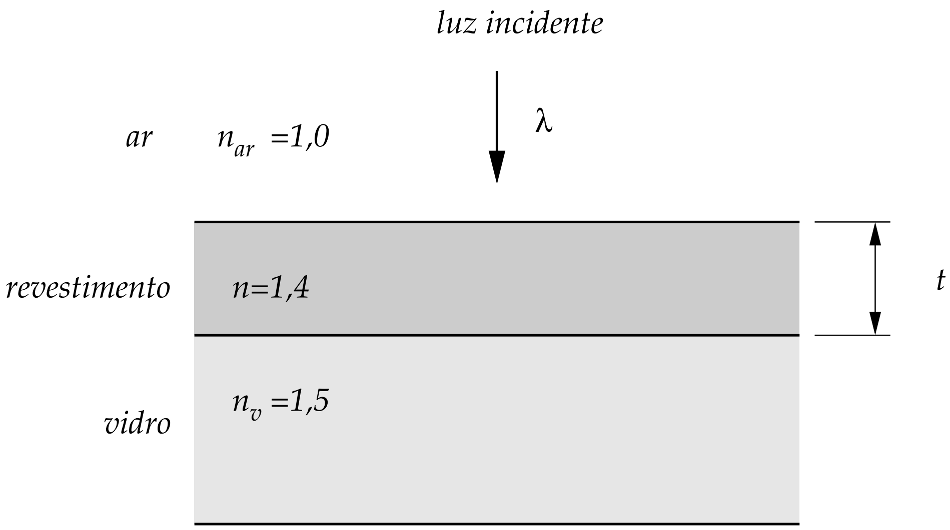
$$W = (IA)T = \frac{IA\lambda}{c} = \boxed{\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \lambda A}$$

(e) Momento transferido num período

$$\vec{P} = \frac{W}{c}\widehat{k} = \boxed{\frac{\epsilon_0}{2c} E_0^2 \lambda A \widehat{k}}$$

Questão 2

Usa-se um material com índice de refração $n = 1,4$ no revestimento de um componente óptico de vidro cujo índice de refração é $n_v = 1,5$. O revestimento forma um filme de espessura constante t. Uma luz de comprimento de onda λ no ar (índice de refração $n_{ar} = 1,0$) incide perpendicularmente sobre o filme.



(a) (1,0 ponto) Deduza a relação entre t e λ para que ocorra interferência construtiva entre as ondas refletidas em cada face do filme.

(b) (1,0 ponto) Idem, para que ocorra interferência destrutiva.

(c) (0,5 ponto) Determine a espessura mínima do filme capaz de produzir interferência destrutiva para uma luz com $\lambda = 500$ nm.

Solução da questão 2

(a) Ocorre mudança de fase de π na onda refletida tanto na face em contato com o ar quanto na face em contato com o vidro. Portanto a condição para interferência construtiva é que a diferença do caminho óptico dessas ondas seja um número inteiro de comprimento de onda

$$\boxed{2tn = 2,8t = \lambda m} \quad m = 1, 2, 3, ...$$

(b) A condição para interferência destrutiva é que a diferença de caminho óptico seja um múltiplo semi inteiro do comprimento de onda

$$\boxed{2tn = 2,8t = \lambda \left(m + \frac{1}{2}\right)} \quad m = 0, 1, 2, ...$$

(c) Aplicando o resultado do item anterior com $\lambda = 500$ nm e $m = 0$

$$t = \frac{500 \text{ nm}}{(2,8)2} = \boxed{89 \text{ nm}}$$

Questão 3

No modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, um elétron de carga e e massa m percorre uma órbita circular de raio r tal que o módulo do momento angular obedece a regra de quantização $L = n\hbar$. Neste mesmo modelo, as grandezas físicas obedecem as mesmas relações da mecânica clássica. De posse dessa informação determine para cada órbita:

(a) (1,0 ponto) a velocidade do elétron.

(b) (1,0 ponto) o raio da órbita.

(c) (0,5 ponto) a energia total do elétron.

As respostas devem ser dadas apenas em termos do número quântico n e das constantes fundamentais e, m, ϵ_0 e $\hbar$.

Solução da questão 3

(a) Aplicando a segunda lei de Newton $F = ma$ ao elétron

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = mv^2 r}_{(*)} = (mvr)v = Lv = n\hbar v.$$

Logo,

$$\boxed{v = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{n}}$$

(b) Usando (*)

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = mv^2 r = \frac{(mvr)^2}{mr} = \frac{L^2}{mr} = \frac{n^2\hbar^2}{mr}.$$

Logo,

$$\boxed{r = \frac{\hbar^2}{m(e^2/4\pi\epsilon_0)}n^2}$$

(c) Usando (*) e o resultado do item (a)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2}mv^2 = \boxed{-\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2}}$$

Questão 4

(I) (1,0 ponto) Determine a probabilidade de se encontrar um elétron do átomo de hidrogênio a uma distância maior que $2a_0$ do núcleo, onde a_0 é o raio de Bohr, quando ele se encontra num estado cuja função de onda normalizada é

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}.$$

(II) (1,5 pontos) Quais são os valores possíveis do momento angular e da componente z do momento angular para um elétron numa camada $3d$?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(I) Probabilidade

$$\text{Prob}(r > 2a_0) = \int_{2a_0}^{\infty} |\psi(r)|^2 \, (4\pi r^2 dr) = \frac{4}{a_0^3} \int_{2a_0}^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr$$
$$= \frac{1}{2} \int_4^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \boxed{13e^{-4} \simeq 0,24}$$

(II) Para um elétron na subcamada $3d$, $n = 3$ e $l = 2$. O módulo do momento angular é

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \boxed{\sqrt{6}\hbar}$$

Os valores possíveis da componente z do momento angular são

$$L_z = \hbar m_l, \qquad m_l = -l, -l+1, \ldots, l-1, l.$$

Portanto,

$$\boxed{L_z = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar}$$

Formulário

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \phi) \widehat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \phi) \widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega,$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 \, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I =< S >= \frac{E_m \, B_m}{2\mu_0},$$

$$< cos^2(kx - \omega t + \phi) >= 1/2, \quad P_{rad} = \frac{2I}{c} \text{ (reflexão total) e } P_{rad} = \frac{I}{c} \text{ (absorsão total)},$$

$$E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc, \quad L = n\hbar, \quad \lambda = \frac{h}{p}, \quad E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ eV},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar, \; L_z = m_\ell \, \hbar, \; S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar, \; S_z = m_s \, \hbar,$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}, \quad \int x e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x}, \quad \int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$