Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA P1

2 de setembro de 2014

Questão 1

Aplica-se uma ddp $v(t) = V\,\mathrm{sen}\,(\omega t)$ nos terminais de um circuito constituído em série por um indutor de indutância L, um capacitor com capacitância C e uma resistência R.

(a) (1,0 ponto) Determine a amplitude da voltagem V_C nos terminais do capacitor em termos de V, L, ω, R e C.

(b) (1,0 ponto) Determine o valor da capacitância para a qual a amplitude da voltagem V_C nos terminais do capacitor é máxima.

(c) (0,5 ponto) Determine o valor da capacitância para a qual a amplitude da corrente no circuito é máxima.

Solução da questão 1

(a) A impedância do circuito é

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

A amplitude da corrente no circuito é

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

A amplitude da voltagem V_C nos terminais do capacitor é

$$\boxed{V_C = \frac{I}{C\omega} = \frac{V}{ZC\omega} = \frac{V}{\sqrt{C^2\omega^2R^2 + (CL\omega^2 - 1)^2}}}.$$

(b) V_C é máximo quando o argumento da raiz quadrada na expressão para V_C no item (a) for mínimo.

$$\frac{d[C^2\omega^2R^2 + (CL\omega^2 - 1)^2]}{dC} = 2C\omega^2R^2 + 2(CL\omega^2 - 1)L\omega^2 = 0$$

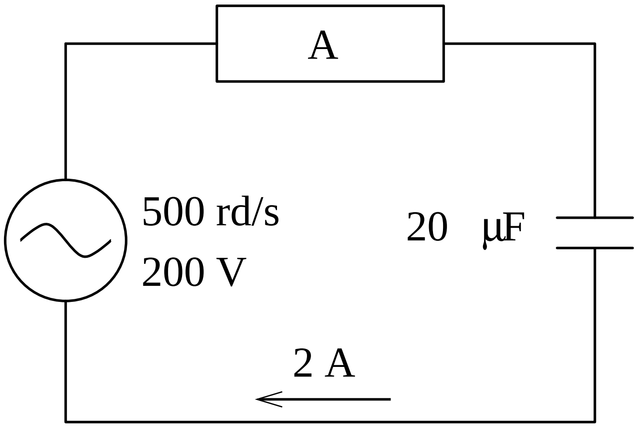
$$\Longrightarrow \boxed{C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

(c) Usando a expressão para I no item (a) vemos que seu valor máximo ocorre quando Z é mínimo (ressonância).

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{L\omega^2}}.$$

Questão 2

Um gerador de CA de frequência angular 500 rd/s alimenta um dispositivo A em série com um capacitor de 20 μF. No dispositivo A a voltagem está adiantada de θ radianos em relação à corrente no circuito. A tensão no gerador cujo valor eficaz é de 200 V está em fase com a corrente. A corrente eficaz no circuito é de 2 A.



(a) (1,0 pontos) Determine a potência média fornecida pelo gerador e a tensão eficaz no capacitor.

(b) (1,0 ponto) Faça um diagrama indicando claramente os fasores das tensões e da corrente. Determine a tensão eficaz no dispositivo e o sua defasagem θ em relação à corrente.

(c) (0,5 ponto) Escreva a expressão da tensão no capacitor em função do tempo (adote fase inicial nula para a corrente).

<u>Dado</u>: 1 μF $= 10^{-6}$ F.

Solução da questão 2

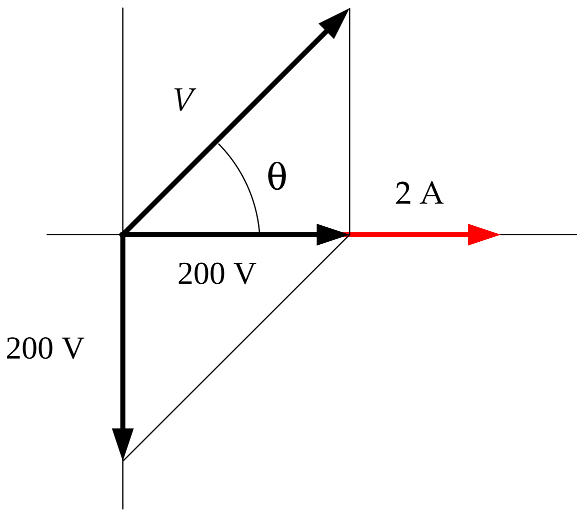
(a) Potência média no circuito

$$P = VI = 200 \times 2 = \boxed{400\text{W}}.$$

Tensão eficaz no capacitor

$$V_C = X_C I = \frac{I}{\omega C} = \frac{2}{(500)(20 \times 10^{-6})} = \boxed{200 \text{ V}}.$$

(b) Diagrama de fasores eficazes



Tensão eficaz no dispositivo

$$V = \sqrt{200^2 + 200^2} = \boxed{200\sqrt{2} \text{ V}}$$

Do diagrama obtemos

$$\tan\theta = \frac{200}{200} = 1 \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

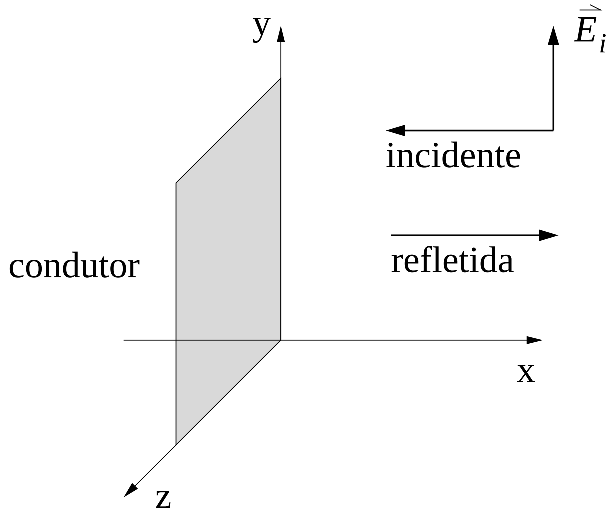
(c) Tensão instantânea no capacitor

$$\boxed{v_C(t) = 200\sqrt{2}\cos\left(500t - \frac{\pi}{2}\right)},$$

onde t é em segundos e v em volts.

Questão 3

Uma onda eletromagnética plana monocromática com comprimento de onda λ, propagando-se no vácuo no sentido negativo do eixo x, incide perpendicularmente sobre uma superfície metálica perfeitamente refletora, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Escreva a expressão do vetor campo elétrico incidente $\vec{E}_i$, em termos de sua amplitude E_0 e do comprimento de onda λ, sabendo que o campo oscila ao longo da direção y e que asssume seu valor máximo em $x = 0$ no instante $t = 0$. Determine o campo magnético da onda incidente $\vec{B}_i$ a partir de $\vec{E}_i$.

(b) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico da onda refletida $\vec{E}_r$ a partir do fato de que o campo elétrico total se anula na superfície do metal. Determine o vetor campo magnético da onda refletida $\vec{B}_r$ a partir de $\vec{E}_r$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a pressão de radiação P_{rad} exercida pela onda sobre a superfície metálica perfeitamente refletora.

Solução da questão 3

(a) A expressão do campo elétrico é

$$\boxed{\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+ct)\right]\widehat{\jmath}},$$

onde usamos $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi c/\lambda$ e $E_i(0,0) = E_0$.

O campo magnético da onda refletida é dado por

$$\boxed{\vec{B}_i(x,t) = \frac{(-\widehat{\imath}) \times \vec{E}_i(x,t)}{c} = -\frac{E_0}{c}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+ct)\right]\widehat{k}}.$$

(b) Na superfície do condutor, temos para todo t

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = 0$$

o que implica

$$\boxed{\vec{E}_r(x,t) = -E_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right]\widehat{\jmath}},$$

O campo magnético da onda refletida é

$$\boxed{\vec{B}_r(x,t) = \frac{\widehat{\imath} \times \vec{E}_r(x,t)}{c} = -\frac{E_0}{c}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right]\widehat{k}}.$$

(c) A pressão de radiação sobre a superfície completamente refletora do metal é

$$\boxed{P_{rad} = 2\frac{< S >}{c} = 2\frac{< E_i B_i >}{\mu_0 c} = 2\frac{< E_i^2 >}{\mu_0 c^2} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E_0^2},$$

onde usamos $< \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right] >= 1/2$.

Questão 4

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo é dado por $\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath}$ com

$$E_x = -E_1 \cos[\omega t - \beta(x+y)],$$
$$E_y = E_2 \cos[\omega t - \beta(x+y)],$$

onde E_1, E_2, β e ω são constantes positivas. O valor máximo atingido pelo módulo do campo elétrico $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ é E_0.

(a) (0,5 pontos) Use a forma diferencial da lei de Gauss para determinar E_1 e E_2 em termos de E_0.

(b) (1,0 ponto) Sabendo que o campo elétrico satisfaz a equação de onda tridimensional, determine a constante β em termos da velocidade da luz no vácuo c e ω.

(c) (1,0 ponto) Use a forma diferencial da lei de Faraday para determinar o campo magnético associado ao campo elétrico dado em termos de E_0, ω e da velocidade da luz no vácuo c.

Solução da questão 4

(a) Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = (-E_1 + E_2)\beta \operatorname{sen}[\omega t - \beta(x+y)] = 0.$$

Logo,

$$E_1 = E_2 = \frac{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{E_0}{\sqrt{2}}}$$

(b) Equação de onda tridimensional

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \left(-2\beta^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E} = \vec{0}.$$

Portanto,

$$\boxed{\beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}c}}$$

(c) Lei de Faraday

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\widehat{k} = \widehat{k}\sqrt{2}E_0\beta \operatorname{sen}[\omega t - \beta(x+y)].$$

Integrando,

$$\vec{B} = \widehat{k}\left(\frac{\sqrt{2}E_0\beta}{\omega}\right)\cos[\omega t - \beta(x+y)] = \boxed{\widehat{k}\left(\frac{E_0}{c}\right)\cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c}\right)\right]}$$

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \;\; X_L = \omega L, \;\; X_C = \frac{1}{\omega C}, \;\; \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \;\; V_m = Z I_m, \;\; V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}},$$

$$I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \;\; P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \;\; \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \;\; \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \;\; \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx \pm \omega t + \phi)\widehat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx \pm \omega t + \phi)\widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega,$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< cos^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2, \quad P_{rad} = \frac{2I}{c} \text{ (reflexão total) e } P_{rad} = \frac{I}{c} \text{ (absorsão total).}$$

Para um campo vetorial $\vec{R}(x,y,z,t) = R_x(x,y,z,t)\widehat{\imath} + R_y(x,y,z,t)\widehat{\jmath} + R_z(x,y,z,t)\widehat{k}$ temos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \; ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{R} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \; ; \quad \nabla^2\vec{R} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial z^2} \, .$$