Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA P3

25 de novembro de 2014

Questão 1

Um elétron em repouso espalha um fóton incidente que possui comprimento de onda λ. Observa-se que o fóton espalhado possui comprimento de onda $\lambda + \Delta\,\lambda$, com $\Delta\,\lambda$ igual ao *comprimento de onda Compton* $\lambda_C = h/(mc)$ do elétron.

(a) (0,5 ponto) Calcule o ângulo de espalhamento do fóton.

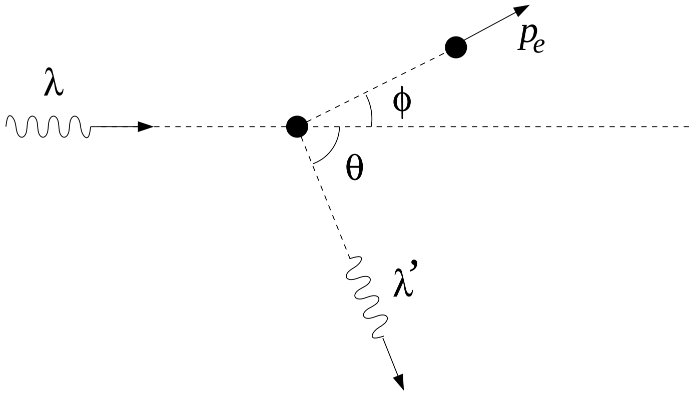
(b) (1,0 ponto) Determine a *energia cinética do elétron*, após a colisão em termos da constante de Planck h, da velocidade da luz c, de λ e $\Delta\,\lambda$.

(c) (1,0 ponto) Determine o módulo do *momento linear do elétron*, após a colisão, em termos da constante de Planck h, de $\Delta\,\lambda$ e λ.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) O ângulo θ de espalhamento do fóton é dado pela fórmula (veja figura abaixo) [1]

$$\Delta\,\lambda = \lambda_C\,(1-\cos\theta)\,.$$



Como $\Delta\,\lambda = \lambda_C$, obtemos

$$\cos\theta = 0, \quad \text{ou seja} \;\; \theta = \frac{\pi}{2}$$

(b) Usando a conservação da energia

$$\Delta E = \Delta\left(m_e\,c^2 + K_e + h\,f\right) = 0,$$

teremos

$$\Delta K_e = -h\,\Delta f = -h\,(f'-f) = hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right) = hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda+\Delta\lambda}\right) = \frac{hc}{\lambda}\frac{\Delta\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}$$

(c) Usando a conservação do momentum linear (veja figura acima) com $\theta = \pi/2$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{h}{\lambda} & = & \dfrac{h}{\lambda'}\cos\theta + p_e\cos\phi = p_e\cos\phi \\ 0 & = & \dfrac{h}{\lambda'}\mathrm{sen}\theta - p_e\mathrm{sen}\phi = \dfrac{h}{\lambda'} - p_e\mathrm{sen}\phi \end{array}\right. .$$

Logo,

$$p_e^2\cos^2\phi + p_e^2\mathrm{sen}^2\phi = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2.$$

Ou seja,

$$p_e = \frac{h}{\lambda}\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{(\lambda+\Delta\lambda)^2}}$$

[1] Uma consequência direta da conservação relativística de energia-momentum.

Questão 2

No modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, um elétron de carga $-e$ e massa m percorre uma orbita circular em torno de um núcleo de carga $+e$.

(a) (0,5 ponto) Deduza a expressão clássica para a velocidade v do elétron em função de e, m, ϵ_0 e do raio r da órbita.

(b) (1,0 ponto) Usando a regra de Bohr para a quantização do momento angular do elétron, deduza a expressão para os raios r_n, $n = 1, 2, 3, ...$ correspondentes às órbitas permitidas do átomo de hidrogênio.

(c) (1,0 ponto) Um átomo de hidrogênio no primeiro estado excitado ($n = 2$) efetua uma transição para o estado fundamental ($n = 1$) emitindo um fóton. Dado que o átomo de hidrogênio estava inicialmente em repouso, calcule sua velocidade após a transição.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) Na órbita circular a força centrípeta é dada pela força de Coulomb:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \Longrightarrow v = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{mr}\right)^{1/2}.$$

(b) No modelo de Bohr o momento angular do elétron nas órbitas permitidas é um múltiplo de $\hbar$:

$$mvr_n = n\hbar.$$

Usando a expressão de v obtida no item (a) na equação acima determinamos r_n:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m}n^2 = \frac{h^2\epsilon_0}{e^2m\pi}n^2.$$

(c) A energia do fóton na transição $E_2 \to E_1$ é

$$E_\gamma = -2,2\times 10^{-18}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right) \approx 1,7\times 10^{-18}\ \text{J}.$$

O momento linear deste fóton é

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{1,7\times 10^{-18}}{3,0\times 10^{8}} \approx 5,7\times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

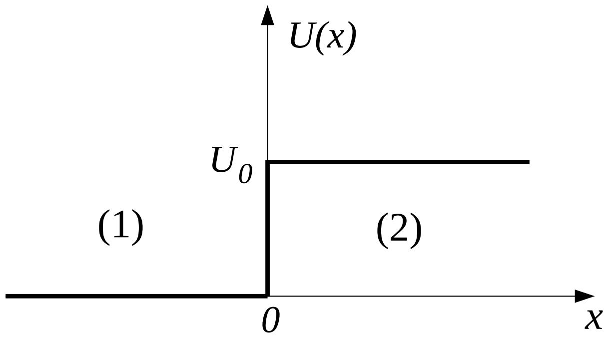
Devido à conservação do momento, o momento linear do átomo de H após a colisão é $-\vec{p}_\gamma$. Portanto, a velocidade do H é

$$v_H = \frac{p_H}{m_H} = \frac{p_\gamma}{m_H} = \frac{5,7\times 10^{-27}}{1,7\times 10^{-27}} \approx 3,6\ \text{m/s}.$$

Questão 3

Uma partícula de massa m e energia constante E, move-se no sentido positivo do eixo x na presença de um degrau de potencial.

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_0 & x \geq 0 \end{cases}$$



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo desta partícula para $x \geq 0$ (região (2)).

(b) (1,0 ponto) Determine a solução geral da equação de Schrödinger na região (2) para $E > U_0$. Qual é a solução fisicamente aceitável para o problema? Justifique.

(c) (1,0 ponto) Determine a solução geral da equação de Schrödinger na região (2) para $E < U_0$. Qual é a solução fisicamente aceitável para o problema? Justifique.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) A equação de Schrödinger na região (2) é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + U_0\psi_2 = E\psi_2$$

(b) Para $E > U_0$ é conveniente reescrever a equação de Schrödinger como

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = -\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}\psi_2 \equiv -k_2^2\psi_2, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}.$$

A solução geral da equação acima é

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_2x} + Be^{-ik_2x}.$$

A solução Be^{-ik_2x} corresponde a uma partícula que se desloca no sentido decrescente do eixo x e não é aceitável. Uma solução deste tipo só existe na região (1) devido à possibilidade da partícula ser refletida pelo degrau de potencial. Portanto $B = 0$ para a solução fisicamente aceitável.

(c) Para $E < U_0$ reescrevemos a equação de Schrödinger como

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = \frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}\psi_2 \equiv K^2\psi_2, \qquad K = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}.$$

A solução da equação acima é

$$\psi_2(x) = Ce^{-Kx} + De^{Kx}.$$

A solução De^{Kx} não é aceitável porque ela diverge quando $x \to \infty$. Portanto $D = 0$ para a solução fisicamente aceitável.

Questão 4

A função de onda do elétron no átomo de hidrogênio, no estado $1s$, é

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = Ce^{-r/a_0},$$

onde a_0 é o raio de Bohr e C é uma constante real.

(a) (1,0 ponto) Use a condição de normalização para determinar o valor de C.

(b) (0,5 ponto) Para este estado, escreva a expressão da distribuição de probabilidade radial (densidade de probabilidade radial). Calcule o valor de r para o qual ela é máxima.

(b) (1,0 ponto) Calcule a probabilidade de se encontrar o elétron a uma distância maior do que a_0.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) Usando o elemento de volume em coordenas esféricas (dado no formulário), no caso em que o integrando não depende de θ e ϕ ($dV = 4\pi r^2 dr$), teremos (supondo C real)

$$4\pi \int_0^\infty |\psi_{100}|^2 r^2 dr = 4\pi C^2 \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr = 1.$$

Utilizando a mudança de variável $x = 2r/a_0$, teremos (usando a integral dada no formulário)

$$4\pi C^2 \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx = \frac{\pi a_0^3 C^2}{2} \left[e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right)\right]_0^\infty = \pi a_0^3 C^2 = 1$$

Logo,

$$C = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}.$$

(b) A densidade de probabilidade radial é

$$P(r) = |\psi_{100}|^2 4\pi r^2 = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0}.$$

O valor de r que maximiza $P(r)$ é obtido resolvendo-se a equação $dP(r)/dr = 0$.

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{4}{a_0^3}\left(2r - r^2 \frac{2}{a_0}\right) e^{-2r/a_0} = 0 \Longrightarrow \boxed{r = a_0} \quad \text{(raio de Bohr).}$$

(c) A probabilidade é

$$P = \int_{a_0}^\infty |\psi_{100}|^2 dV = \frac{4}{a_0^3} \int_{a_0}^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr.$$

Utilizando novamente a mudança de variável $x = 2r/a_0$, teremos

$$P = \frac{1}{2}\int_2^\infty e^{-x} x^2 dx = \frac{1}{2}\left[e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right)\right]_2^\infty = \frac{1}{2}\left[e^{-2}\left(4 + 4 + 2\right)\right] = \frac{5}{e^2} \approx 0,68.$$

Formulário

$h = 4,1 \times 10^{-15}\text{eV}\cdot\text{s}, \quad c = 3,0 \times 10^{8}\text{m/s}, \quad 1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{J},$

massa do átomo de H $= 1,7 \times 10^{-27}$kg,

$E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc, \quad L = n\hbar, \quad \hbar = h/(2\pi), \quad \lambda = \dfrac{h}{p},$

$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta), \quad \lambda_C = \dfrac{h}{m_e c}, \quad E_n = -\dfrac{13,6}{n^2}\ \text{eV} = -\dfrac{2,2 \times 10^{-18}}{n^2}\ \text{J},$

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad dV = dxdydz, \quad dV = 4\pi r^2 dr,$

$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar,\ L_z = m_\ell\,\hbar,\ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar,\ S_z = m_s\,\hbar,$

$\int e^{-x}dx = -e^{-x}, \quad \int xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}, \quad \int x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x}.$