Física IV - 4320402

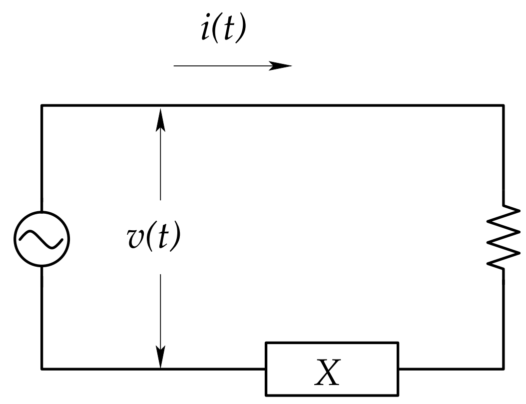
Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA PR

10 de fevereiro de 2015

Questão 1

No circuito abaixo um gerador de corrente alternada está em série com um resistor e um elemento desconhecido X que pode ser um resistor, um capacitor ou um indutor.



As tensões e correntes instantâneas no circuito são

$$v(t) = 80 \cos 100t \quad (\text{V}) \quad \text{e} \quad i(t) = 2\cos(100t + \pi/3) \quad (\text{A}),$$

sendo t em segundos.

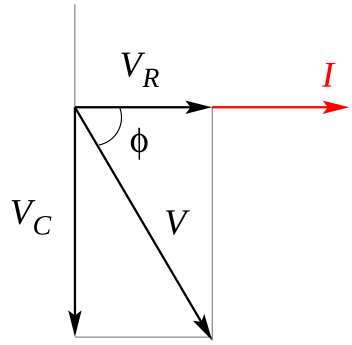
(a) (1,0 ponto) Construa o diagrama de fasores para a corrente e as tensões. Identifique o elemento X (resistor, capacitor ou indutor) justificando a sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Determine a resistência do resistor e a propriedade característica do elemento X (resistência, capacitância ou indutância).

(c) (0,5 pontos) Determine o fator de potência e a potência média dissipada no circuito.

Solução da questão 1

(a) Diagrama de fasores



$V = 80$ V,

$I = 2$ A,

$\phi = \frac{\pi}{3}$ rd.

A corrente está adiantada em relação à tensão. Logo o elemento X é um capacitor.

(b) Amplitude da tensão no resistor

$$V_R = V\cos\phi = 80\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 40 \text{ V}.$$

Resistência

$$R = \frac{V_R}{I} = \frac{40}{2} = 20\ \Omega.$$

Amplitude da tensão no capacitor

$$V_C = V\,\text{sen}\,\phi = 80\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 40\sqrt{3} \text{ V}.$$

Reatância capacitiva

$$X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{40\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}\ \Omega.$$

Capacitância

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{100(20\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ mF}.$$

(c) Fator de potência

$$\cos\phi = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Potência média dissipada

$$P = \frac{1}{2}VI\cos\phi = \left(\frac{1}{2}\right)(80)(2)\left(\frac{1}{2}\right) = 40 \text{ W}.$$

Questão 2

Uma onda eletromagnética plana e monocromática que se propaga no vácuo tem seu campo magnético dado por

$$\vec{B}(x,t) = 3 \times 10^{-8} \,\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - 3 \times 10^{11} t\right)\right] \widehat{k} \quad \text{T},$$

onde x é em metros e t em segundos.

(a) (1,0 ponto) Calcule o comprimento de onda λ e escreva a expressão completa do vetor campo elétrico desta onda.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting associado a esta onda e seu valor médio (intensidade).

(c) (0,5 ponto) Calcule a pressão de radiação exercida por esta onda sobre um espelho completamente refletor colocado perpendicularmente à direção de propagação desta onda.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) O vetor campo magnético tem a forma $\vec{B}(x,t) = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\widehat{k}$, onde $B_0 = 3 \times 10^{-8}$ T, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ m e $\omega = 2\pi 10^{11}$ s. Usando a relação $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(cT) = \omega/c$ obtemos

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{(2\pi)(3 \times 10^8)}{(2\pi)(3 \times 10^{11})} = 10^{-3} \quad \text{m}.$$

A amplitude E_0 do campo elétrico relaciona-se com a amplitude do campo magnético através de $E_0 = cB_0$. Assim,

$$E_0 = (3 \times 10^8)(3 \times 10^{-8}) = 9 \quad \text{V/m}.$$

Lembrando que $\vec{E}$, $\vec{B}$ e a direção de propagação ($\widehat{\imath}$) formam um triedro destrógiro obtemos.

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x,t) &= 9 \operatorname{sen}\left[2\pi\left(10^3 x - 3 \times 10^{11} t\right)\right]\widehat{\jmath} \quad \text{V/m}, \\
\vec{B}(x,t) &= 3 \times 10^{-8} \operatorname{sen}\left[2\pi\left(10^3 x - 3 \times 10^{11} t\right)\right]\widehat{k} \quad \text{T}.
\end{aligned}$$

(b) O vetor de Poynting é

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{27 \times 10^{-8}}{4\pi \times 10^{-7}} \operatorname{sen}^2\left[2\pi\left(10^3 x - 3 \times 10^{11} t\right)\right]\widehat{\imath} \\
&= \frac{27}{40\pi} \operatorname{sen}^2\left[2\pi\left(10^3 x - 3 \times 10^{11} t\right)\right]\widehat{\imath} \quad \text{W/m}^2.
\end{aligned}$$

A intensidade é a média temporal de S.

$$I = < S > = \frac{27}{40\pi} < \operatorname{sen}^2\left[2\pi\left(10^3 x - 3 \times 10^{11} t\right)\right] > = \frac{27}{80\pi} \quad \text{W/m}^2.$$

(c) Para uma superfície completamente refletora a pressão de radiação é

$$P = \frac{2I}{c} = \frac{2 \times 27}{80\pi(3 \times 10^8)} = \frac{9 \times 10^{-8}}{40\pi} \quad \text{N/m}^2.$$

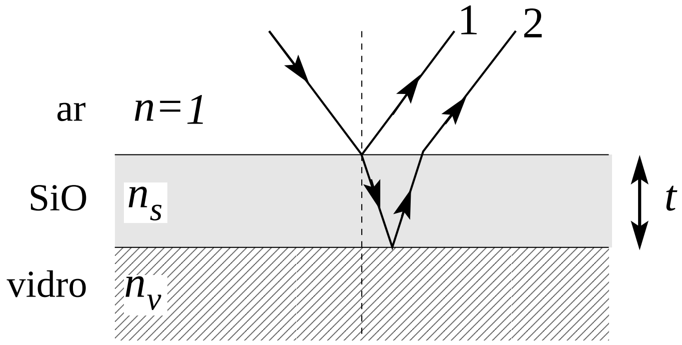
Questão 3

(I) (1,5 ponto) Na indústria de bijuterias o vidro que tem índice de refração $n_V = 1,5$ é algumas vezes recoberto com monóxido de silício ($n_S = 2,0$) para torná-lo mais refletivo. Deduza a condição para a espessura da camada de monóxido de silício para que luz de comprimento de onda λ_0 no vácuo, incidindo normalmente sobre a camada e refletida nas duas superfícies da camada, interfiram construtivamente. Calcule a espessura mínima para que isto ocorra para $\lambda_0 = 560$ nm.

(II) (1,0 ponto) O máximo da emitância espectral de uma lâmpada incandescente com filamento de tungstênio operando normalmente ocorre para um comprimento de onda na região do infravermelho. Sabendo-se que a temperatura de fusão do tungstênio é 3650 K, é possível construir uma lâmpada com filamento de tungstênio mais eficiente para a qual o máximo da emitância ocorra para $\lambda = 580$ nm (luz amarela)? Justifique.

Solução da questão 3

(I) A luz será fortemente refletida se houver interferência construtiva entre os raios 1 e 2 na figura abaixo.



$$2\pi\frac{2t}{\lambda_S} - \pi = 2\pi m \Longrightarrow n_S\frac{2t}{\lambda_0} = m + \frac{1}{2} \Longrightarrow t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0}{2n_S}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

A espessura mínima é obtida com $m = 0$.

$$t_{mín} = \frac{\lambda_0}{4n_S} = \frac{560}{4 \times 2,0} = 70 \text{ nm}.$$

(II) A temperatura do filamento está relacionado com o pico da emitância espectral através da lei de Wien: $\lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}$ K·m.

Para que o pico da emitância ocorra em 580 nm a temperatura do filamento deveria ser

$$T = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{5,8 \times 10^{-7}} = 5,0 \times 10^3 \text{ K}.$$

Uma lâmpada com filamento de tungstênio operando nesta temperatura é inviável porque a temperatura de fusão do tungstênio é 3650 K.

Questão 4

Em um determinado instante de tempo, o estado quântico de uma partícula confinada em uma região $-a \leq x \leq a$ é descrito pela função de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2)^{1/2} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases},$$

com A e a reais e positivos.

(a) (1,0 ponto) Mostre que para a função de onda normalizada $A = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{a^3}}$.

(b) (1,0 ponto) Qual é a probabilidade de encontrar a partícula na região $x \geq 0$?

(c) (0,5 ponto) Calcule os valores médios $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ e determine o desvio padrão $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) Utilizando a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi^{\star}(x)dx = 1,$$

teremos

$$|A|^2 \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx = |A|^2 \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}|A|^2 a^3 = 1.$$

Logo a solução real e positiva é $A = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{a^3}}$.

(b) A probabilidade de encontrar e partícula em $x \geq 0$ é

$$\int_{0}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{3}{4a^3} \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)dx = \frac{3}{4a^3} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

(c) O valor esperado de x é

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) x \psi^{\star}(x)dx = \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)x dx.$$

Como o integrando é uma função ímpar de x e o intervalo de integração é simétrico, então $\boxed{\langle x \rangle = 0}$.

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) x^2 \psi^{\star}(x)dx = \frac{3}{4a^3} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)x^2 dx \\ &= 2\frac{3}{4a^3} \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)x^2 dx = \frac{3}{2a^3} \left(\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{5} \right) = \frac{a^2}{5} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R},$$

$$V_m = Z I_m, \quad P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}, \quad \vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \phi)\widehat{e}_y,$$

$$\vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \phi)\widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega, \quad E_m = cB_m, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N\cdot s^2}}{\mathrm{C^2}}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I =< S >= \frac{E_m\, B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx - \omega t + \phi) >=< \mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \phi) >= 1/2, \quad P_{rad} = \frac{2I}{c} \text{ (reflexão total)},$$

$$P_{rad} = \frac{I}{c} \text{ (absorsão total)}, \quad c = 3\times 10^8 \text{ m/s}, \quad 1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}, \quad \lambda_m T = 2,9\times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma = 5,7 \times 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$