Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2014

GABARITO DA PS

2 de dezembro de 2012

Questão 1

Uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo possui campo elétrico $\vec{E}(z,t) = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath}$ e campo magnético $\vec{B}(z,t) = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}$. Sabe-se que

$$E_x = E_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct),$$

e

$$B_x = -\frac{E_0}{c} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct).$$

(a) (0,5 pontos) Qual é a direção e o sentido de propagação dessa onda?

(b) (1,0 ponto) Usando a equação de Maxwell apropriada determine as componentes E_y e B_y.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) A onda se propaga no sentido crescente da direção do eixo z.

(b) A equação de Maxwell (lei de Faraday)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

fica para $E_z = 0$ e $B_z = 0$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{\imath} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{\jmath} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{\imath} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{\jmath}.$$

Igualando as componentes

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = E_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct),$$
$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} = E_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct).$$

Integrando

$$\boxed{E_y = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)} \qquad \boxed{B_y = \frac{E_0}{c} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)}.$$

(c) Vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(E_x B_y - B_x E_y\right) \vec{k} = \boxed{\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\vec{k}}$$

Questão 2

(I) (1,0 ponto) A experiência de Young com fenda dupla é realizada com laser de comprimento de onda $\lambda = 6000$ Å incidindo normalmente sobre as fendas. No anteparo a uma distância $L = 1$ m das fendas observam-se franjas de interferência espaçadas de 3 cm. Calcule a separação d entre as fendas admitindo-se que $d \ll L$.

(II) (1,5 pontos) Um filme de óleo com índice de refração $n = 1,3$ e espessura $t = 0,35$ μm flutua sobre uma superfície plana de água (índice de refração 1,33). O filme é iluminado de cima, perpendicularmente, por luz branca constituída por comprimentos de onda (no vácuo) variando entre 400 nm e 700 nm. Nessa região, para quais comprimentos de onda (no vácuo) ocorrem interferências construtivas entre as ondas refletidas nas duas superfícies do óleo?

Solução da questão 2

(I) Condição para interferência construtiva

$$d\sin\theta = m\lambda, \qquad m \text{ inteiro.}$$

Posição das franjas brilhantes no anteparo

$$y = L\tan\theta \simeq L\sin\theta = \frac{mL\lambda}{d} = m\Delta y,$$

onde Δy é o espaçamento entre as franjas no anteparo. Portanto o separação entre as fendas é

$$d = \frac{L\lambda}{\Delta y} = \frac{(1\ \text{m})(6000\times 10^{-10}\ \text{m})}{3\times 10^{-2}\ \text{m}} = 2\times 10^{-5}\ \text{m} = \boxed{20\ \mu\text{m}}$$

(II) Há mudança de fase por reflexão nas duas superfícies. A condição para interferência construtiva é

$$2tn = m\lambda, \quad m \text{ inteiro.}$$

Portanto ocorre interferência construtiva para

$$\lambda = \frac{2(0,35\times 10^{-6}\ \text{m})(1,3)}{m} = \frac{910\ \text{nm}}{m} = 910\ \text{nm}, 455\ \text{nm}, 303\ \text{nm}, \ldots .$$

O único comprimento de onda no intervalo da luz incidente é

$$\boxed{\lambda = 455\ \text{nm}}$$

Questão 3

Uma luz monocromática de comprimento de onda 410 nm incide sobre três válvulas fotoelétricas com catodos de metais diferentes: Lítio com função de trabalho de 2,3 eV, berílio com função de trabalho de 3,9 eV e mercúrio com função de trabalho de 4,5 eV.

(a) (1,5 ponto) Para quais metais será observado o efeito fotoelétrico?

(b) (1,0 ponto) Calcule o potencial de corte para os casos em que ocorre o efeito fotoelétrico conforme resposta do item (a).

Solução da questão 3

(a) Equação de Einstein para o efeito fotoelétrico

$$K_{\text{max}} = hf - \phi.$$

O efeito fotoelétrico ocorre para $K_{\text{max}} > 0$, ou

$$\phi < hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4,1 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s})(3 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(410 \times 10^{-9}\ \text{m})} = 3\ \text{eV}.$$

Portanto o efeito fotoelétrico ocorre apenas para o $\boxed{\text{lítio}}$.

(b) Potencial de corte para lítio

$$eV_c = K_{\text{max}} = hf - \phi = 3\ \text{eV} - 2,3\ \text{eV} = 0,7\ \text{eV}.$$

Portanto

$$\boxed{V_c = 0,7\ \text{V}}$$

Questão 4

A função

$$\phi(x,t) = Ae^{i2\pi(x/\lambda - ft)}$$

representa uma onda de comprimento de onda λ e frequência f.

(a) (1,0 ponto) Admitindo-se que $\phi(x,t)$ é uma onda de de Broglie para uma partícula de momento p e energia E, escreva ϕ em termos destes parâmetros.

(b) (1,5 pontos) A onda de de Broglie do item anterior deve satisfazer a equação de Schrödinger dependente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

com $V(x) = V_0$ (constante) que descreve uma partícula livre. Determine E como função de p, m e V_0 para que isto ocorra.

Solução da questão 4

(a) Usando as relações de de Broglie

$$f = \frac{E}{h}, \qquad \lambda = \frac{h}{p}.$$

obtemos

$$\phi = Ae^{i2\pi(x/\lambda - ft)} = \boxed{Ae^{i(px-Et)/\hbar}}$$

(b) Tem-se

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}\phi, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\phi, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\phi.$$

Substituindo na equação de Schrödinger obtemos

$$\frac{p^2}{2m}\phi(x,t) + V_0\phi(x,t) = E\phi(x,t) \qquad \text{para todo } x, t$$

Portanto,

$$\boxed{E = V_0 + \frac{p^2}{2m}}$$

Formulário

$$c = 3 \times 10^8, \quad h = 4,1 \times 10^{-15}\text{eV} \cdot \text{s}, \quad 1\text{nm} = 1 \times 10^{-9}\text{ m}.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad E = cB,$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \phi)\widehat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \phi)\widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega,$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I =< S >= \frac{E_m\, B_m}{2\mu_0},$$

$$< cos^2(kx - \omega t + \phi) >= 1/2, \quad P_{rad} = \frac{2I}{c} \text{ (reflexão total) e } P_{rad} = \frac{I}{c} \text{ (absorsão total)},$$

$$E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc, \quad K_{\max} = hf - \phi, \quad L = n\hbar, \quad \lambda = \frac{h}{p}, \quad E_n = -13,6\frac{Z^2}{n^2}\text{ eV}.$$