Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA P1

3 de setembro de 2015

Questão 1

Luz de comprimento de onda de 500 nm de uma fonte pontual distante incide normalmente sobre um anteparo com uma fenda de largura $a = 5000$ nm. O *padrão de difração* é observado numa tela a uma distância $L = 3$ m do anteparo.

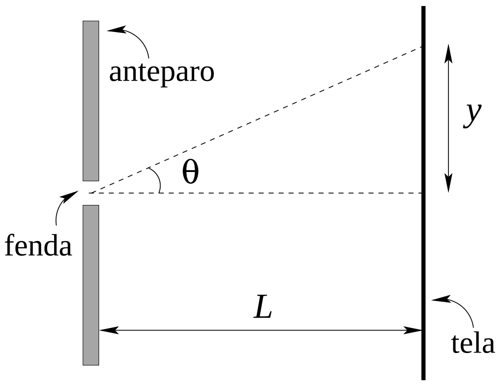


Figura 1

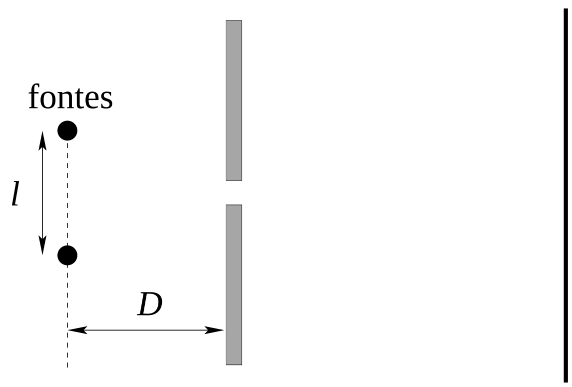


Figura 2

(a) (1,0 ponto) Calcule a posição angular do primeiro e do segundo mínimos de difração com $\theta > 0$ (use a aproximação sen$\theta \approx$ tg$\theta \approx \theta$).

(b) (0,5 ponto) Calcule a distância $y > 0$ do primeiro máximo lateral de difração em relação ao centro da figura de difração (veja a figura 1). Use a aproximação de que um máximo lateral está situado à meia distância dos mínimos adjacentes.

(c) (1,0 ponto) Considere agora duas fontes pontuais idênticas, não coerentes, emitindo luz desse mesmo comprimento de onda (500 nm), situadas à mesma distância D da fenda e separadas por $\ell = 2$ m, conforme a figura 2. Determine a distância máxima D para que essas duas fontes estejam minimamente resolvidas no tela.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) Os mínimos da figura de difração produzidas por uma fenda de largura a são dados por

$$a\,\text{sen}\theta \;=\; m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, ...$$

Os primeiros dois mínimos com $\theta > 0$ são dados por

$$a\,\text{sen}\theta_1 \;=\; \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\theta_1 \;=\; 0,1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 \;\approx\; 0,1\,\text{rad}$$
$$a\,\text{sen}\theta_2 \;=\; 2\,\lambda \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\theta_2 \;=\; 0,2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 \;\approx\; 0,2\,\text{rad}$$

(b) O primeiro máximo lateral está está em $\approx$ (0,1+0,2)/2 = 0,15 rad. Assim a distância $y = 0,15 \times 3 = 0,45$ m.

c) Critério de Rayleigh: máximo da segunda fonte coincidindo com mínimo da primeira.

$\theta_{mín} \;=\; \lambda/a \;=\; 0,1$

$\ell \;=\;$ *distância entre as fontes*

$D \;=\;$ *distância das fontes à fenda*

$\theta_{mín} \approx \ell/D \;=\; 0,1$ *para* ℓ *= 2 metros teremos* $D \;=\;$ *20 metros.*

Questão 2

Uma película transparente de espessura $t = 4 \times 10^{-5}$ cm e com índice de refração $n = 1,5$ é iluminada normalmente por luz branca. A pelicula está suspensa no ar (índice de refração $n = 1$).

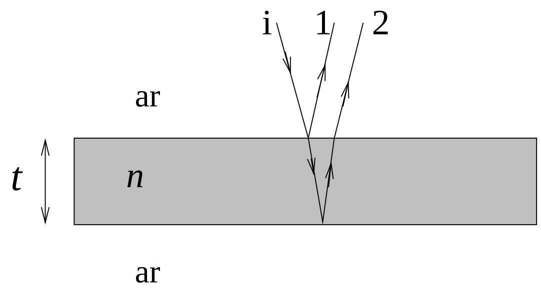
(a) (1,0 ponto) A luz refletida nas duas superfícies da película interferem entre si. Obtenha a equação que determina os comprimentos de onda das ondas que interferem construtivamente.

(b) (0,5 ponto) A luz visível é composta por ondas com comprimentos de onda entre 400 nm e 700 nm. Qual onda da luz visível interferirá construtivamente?

(c) (1,0 ponto) A mesma película é imersa num líquido com indice de refração $n_2 > 1,5$. Escreva a equação que determina os comprimentos de onda que interferem construtivamente.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) O raio incidente i se divide no raio refletido 1 e no raio refratado 2, conforme a figura.



Como o índice de refração da película é maior que o do vácuo, o raio 1 vai se defasar de π radianos, ou de meio comprimento de onda. Para haver interferência construtiva devemos ter

$$\frac{2\pi}{\lambda_{película}}2t - \pi = m2\pi. \Longrightarrow 2nt = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

onde $\lambda_{película} = \lambda/n$, λ é o comprimento de onda no vácuo e $m = 0, 1, 2, 3....$

(b) Do item (a) vem

$$\lambda = \frac{2nt}{m + 1/2} = \frac{4nt}{2m + 1} = \frac{(4 \times 1,5)(4 \times 10^{-7})}{2m + 1} = \frac{24 \times 10^{-7}}{2m + 1}$$

$$\lambda_m \equiv \frac{24}{2m + 1} \times 10^{-7}\ \text{m} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\lambda_0 = 24 \times 10^{-7}\ \text{m} \\ &\lambda_1 = 8,0 \times 10^{-7}\ \text{m} \\ &\lambda_2 = 4,8 \times 10^{-7}\ \text{m} \Leftarrow \text{visível} \\ &\lambda_3 = 3,4 \times 10^{-7}\ \text{m} \\ &\lambda_4 = 2,7 \times 10^{-7}\ \text{m} \end{aligned}$$

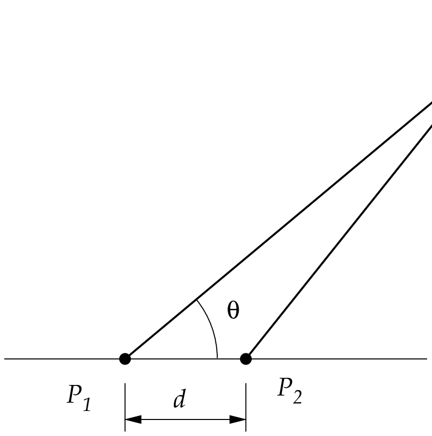
(c) Como o líquido tem índice de refração maior do que o da película, agora é o raio 2 que adquire uma fase de π radianos.

$$\frac{2\pi}{\lambda_{película}}2t + \pi = m2\pi. \Longrightarrow 2nt = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

onde $m = 1, 2, 3....$ A equação é igual à do item (a), mas $m > 0$.

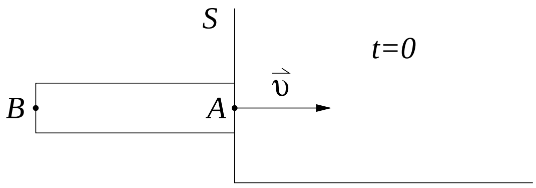
Questão 3

(I) (1,0 ponto) Um receptor em P recebe o sinal de uma antena de rádio que transmite em frequência f a partir de um local distante P_1. Uma nova antena é construída no ponto P_2 a uma distância d da primeira. A nova antena transmite sinal idêntico à primeira. A direção PP_1 faz um ângulo θ com a direção P_1P_2, conforme a figura, e $d \ll PP_1$.



Para quais frequências haverá melhor recepção possível (máxima intensidade de recepção)?

(II) Uma barra de comprimento próprio ℓ_0 move-se com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{\imath}$ relativamente ao sistema S conforme a figura. A extremidade A da barra passa pela origem de S no instante $t = 0$. Neste instante é emitido de A um sinal de luz que viaja de A para B.



(a) (0,5 ponto) Em que instante t'_B medido num referencial em repouso em relação à barra o sinal chega a B?

(b) (1,0 ponto) Em que instante t_B medido no referencial S o sinal chega a B?

Solução da questão 3

(I) Condição para interferência construtiva

$$\Delta r = r_1 - r_2 \approx d\cos\theta = \lambda m = (c/f)m, \qquad m \text{ inteiro .}$$

Frequências com melhor recepção

$$\boxed{f = \left(\frac{c}{d\cos\theta}\right) m, \quad m = 1, 2, \ldots}$$

(II) Barra e sinal de luz.

(a) Num referencial em repouso em relação à barra o tempo é

$$t'_B = \frac{\ell_0}{c}.$$

(b) No referencial S o comprimento da barra é $\ell = \ell_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Levando em conta que no tempo t_B a barra também se desloca vt_B em direção ao sinal de luz obtemos

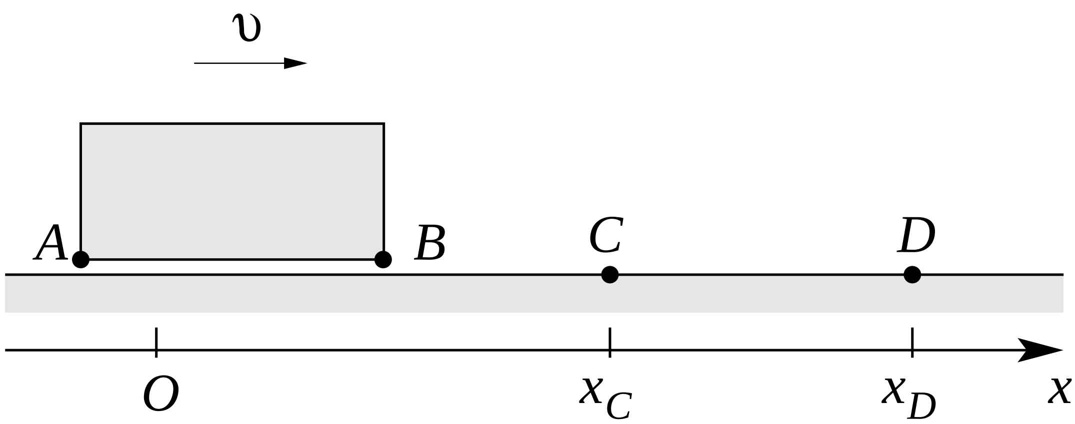
$$t_B = \frac{\ell - vt_B}{c} \Longrightarrow t_B = \frac{\ell}{c+v} = \frac{\ell_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c+v} = \frac{\ell_0}{c}\left[\frac{c-v}{c+v}\right]^{1/2}.$$

Solução alternativa: Colocando um referencial S' preso na barra e que coincide com S em $t = t' = 0$ podemos usar a transformação de Lorentz para determinar as coordenadas do evento ligado à chegado do sinal em B. Em S' as coordenadas são $x'_B = -\ell_0$ e $t'_B = \ell_0/c$. O tempo t_B em S é

$$t_B = \frac{t'_B + vx'_B/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\ell_0/c - v\ell_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\ell_0}{c}\left[\frac{c-v}{c+v}\right]^{1/2}.$$

Questão 4

Um veículo se move com velocidade uniforme v em relação ao solo. Sejam A e B as extremidades do veículo e C e D marcações no solo, como na figura. Definamos o evento $B \equiv C$ como a passagem de B por C e os eventos $B \equiv D$, $A \equiv C$ e $A \equiv D$ de forma análoga.



(a) (1,0 ponto) Se o intervalo de tempo entre os eventos $B \equiv C$ e $A \equiv C$ (tempo gasto pelo veículo para passar pelo ponto C) no referencial do veículo é $\Delta t'$, qual é o intervalo de tempo entre esses eventos no referencial do solo?

(b) (1,0 ponto) Se os eventos $B \equiv D$ e $A \equiv C$ são simultâneos no referencial do veículo, qual é o intervalo de tempo entre esses eventos no referencial do solo?

(c) (0,5 pontos) Qual é a ordem temporal dos eventos $B \equiv D$ e $A \equiv C$ no referencial do solo?

Solução da questão 4

(a) Seja S' o referencial do veículo e S o referencial do solo. Usando a transformação de Lorentz vem

$$\Delta t' = t'_{A\equiv C} - t'_{B\equiv C} = \gamma[(t_{A\equiv C} - t_{B\equiv C}) - v(x_{A\equiv C} - x_{B\equiv C})/c^2].$$

Como $x_{A\equiv C} = x_{B\equiv C} = x_C$

$$\Delta t' = \gamma(t_{A\equiv C} - t_{B\equiv C}) \quad \text{ou} \quad \boxed{t_{A\equiv C} - t_{B\equiv C} = \Delta t' \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(b) Usando a transformação de Lorentz vem

$$t'_{B\equiv D} - t'_{A\equiv C} = \gamma[(t_{B\equiv D} - t_{A\equiv C}) - v(x_{B\equiv D} - x_{A\equiv C})/c^2] = 0.$$

Usando $x_{B\equiv D} = x_D$ e $x_{A\equiv C} = x_C$ podemos escrever

$$\boxed{t_{B\equiv D} - t_{A\equiv C} = \frac{v(x_D - x_C)}{c^2}}$$

(c) Como $x_D > x_C$, $t_{B\equiv D} - t_{A\equiv C} > 0$ e o evento $A\equiv C$ precede o evento $B\equiv D$.

Formulário

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(x - ut\right), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma\left(x' + ut'\right), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{ux'}{c^2}\right), \end{cases}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \ell = \ell_0\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

$$1\,\mathrm{nm} = 10^{-9}\,\mathrm{m}, \quad I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\beta/2\right)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = 2\pi\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\lambda}, \quad \theta_{mín} \approx \frac{\lambda}{a}.$$