Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA P2

15 de outubro de 2015

Questão 1

Uma partícula com massa de repouso m_0, viajando com velocidade $v = 0,6c$ (c é a velocidade da luz), colide com uma partícula idêntica inicialmente em repouso. Após a colisão as duas partículas formam uma única partícula de massa de repouso M_0 com velocidade V. As respostas devem ser dadas em termos de c e de m_0.

(a) (1,0 ponto) Calcule a velocidade V da partícula resultante.

(b) (1,0 ponto) Calcule a massa de repouso M_0 dessa nova partícula.

(c) (0,5 ponto) Calcule a energia cinética da nova partícula.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) Conservação de energia:

$$\gamma m_0 c^2 + m_0 c^2 = \gamma\,' M_0 c^2 \Longrightarrow \gamma m_0 + m_0 = \gamma\,' M_0, \tag{1}$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,6)^2}} = \frac{5}{4}; \quad \text{e} \quad \gamma\,' = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

Conservação de momento:

$$\gamma m_0 v = \gamma\,' M_0 V. \tag{2}$$

Dividindo a eq. (2) pela eq. (1) obtemos

$$V = \frac{\gamma}{\gamma+1} v = \frac{5/4}{5/4+1} 0,6c = \frac{c}{3}.$$

(b) Usando V obtido no item (a) obtemos

$$\gamma\,' = \frac{1}{\sqrt{1-(1/3)^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Da equação (1) do item (a) vem

$$M_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma\,'} m_0 = \frac{5/4+1}{3/(2\sqrt{2})} m_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} m_0.$$

(c) A energia cinética da nova partícula é

$$K = (\gamma\,' - 1) M_0 c^2 = (\frac{3\sqrt{2}}{4} - 1)\frac{3\sqrt{2}}{2} m_0 c^2 = (\frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2}) m_0 c^2.$$

Questão 2

(I) (1,5 ponto) A superfície de uma estrela tem área de 10^{18} m^2 e emite 6×10^{26} watts. Qual é o comprimento de onda que corresponde ao máximo da distribuição de intensidades da luz emitida por essa estrela? Aproxime a radiação da estrela pela de um corpo negro.

(II) (1,0 ponto) Para testar a teoria da relatividade, um farol na Terra envia sinais luminosos a cada 2 segundos para uma nave espacial que se afasta da Terra com velocidade $0,6c$. A espaçonave recebe estes sinais e os retransmite de volta ao farol. Qual é o intervalo de tempo entre os sinais recebidos pelo farol?

Solução da questão 2

(I) A intensidade que é a potência por unidade de área é dada pela lei de Stefan-Botzmann

$$I = \frac{P}{A} = \sigma T^4 \Longrightarrow \frac{6 \times 10^{26}}{10^{18}} = 6 \times 10^{-8} T^4 \Longrightarrow T = 10^4 \text{ K}.$$

O comprimento de onda que corresponde à máxima intensidade nesta temperatura é dado pela lei de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{T} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{10^4} = 2,9 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

(II) A frequência do sinais luminosos emitidos pelo farol é $f_0 = 1/2$ Hz. Como a nave se afasta da Terra a frequência dos sinais recebidos pela nave é

$$f' = f_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}.$$

Ao serem retransmitidos pela nave os sinais vão sofrer outro deslocamento Doppler:

$$f = f' \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = f_0 \frac{c - v}{c + v} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 0,6}{1 + 0,6} \right) = \frac{1}{8} \text{ Hz}.$$

O intervalo entre os sinais recebidos no farol é $\Delta t = 1/f = 8$ s. Ou seja, 1 sinal a cada 8 segundos.

Questão 3

(I) A função de trabalho para o metal lantânio é de 3,3 eV. Suponha que uma placa deste metal seja iluminada com luz de comprimento de onda igual a 2000 Å. Considere os fotoelétrons não relativísticos emitidos da placa com o máximo de energia possível. Nessas condições

(a) (1,0 ponto) Calcule o valor da energia cinética desses elétrons.

(b) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda de de Broglie desses elétrons. Dê sua resposta em função da constante de Planck h, da massa m_0 do elétron e de sua energia cinética K.

(II) No modelo de Bohr os níveis de energia do átomo de hidrogênio são dados pela expressão $E_n = -C/n^2$, onde $C > 0$ é uma constante e $n > 0$ é um número inteiro. Considere um elétron num átomo de hidrogênio no nível de energia com $n = 4$.

(a) (0,5 ponto) Calcule a frequência do fóton emitido, caso esse elétron fizesse uma transição para o estado fundamental.

(b) (0,5 ponto) Calcule a energia necessária para ionizar esse átomo, ou seja, para remover o elétron da camada com $n = 4$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(I) Efeito fotoelétrico e comprimento de onda de de Broglie.

(a) A energia cinética máxima é

$$K_{máx} = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{(4 \times 10^{-15})(3 \times 10^{8})}{2000 \times 10^{-10}} - 3,3 = 2,7 \text{ eV}.$$

(b) O comprimento de onda de de Broglie do elétron é $\lambda = h/p$

$$K = \frac{p^2}{2m_0} \Longrightarrow p = \sqrt{2m_0 K} \Longrightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K}}$$

(II) Modelo de Bohr.

(a) A variação de energia do elétron na transição $4 \longrightarrow 0$ é

$$\Delta E = C\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{15}{16}C.$$

A frequência do fóton emitido é

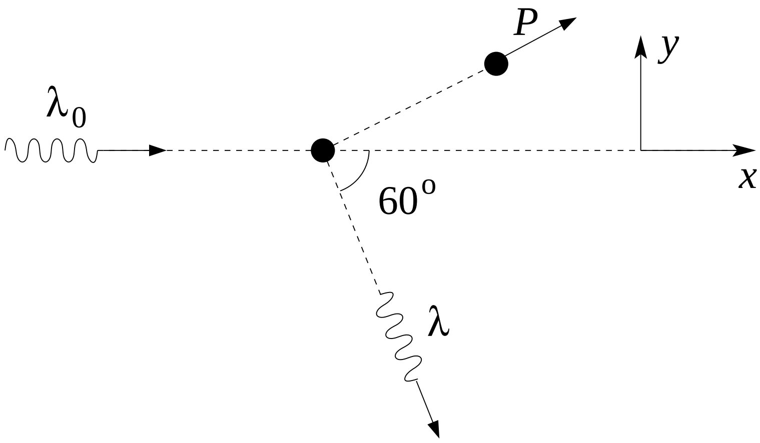
$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{15C}{16h}.$$

(b) A energia para ionizar o átomo com o elétron na camada com $n = 4$ é

$$E_{ionizar} = E_\infty - E_4 = \frac{C}{4^2} = \frac{C}{16}.$$

Questão 4

Num espalhamento Compton, um fóton de comprimento de onda λ_0 incide em um elétron inicialmente em repouso (massa m_0). O fóton espalhado é observado numa direção que faz um ângulo de 60° em relação à direção de incidência. As respostas devem ser dadas em termos de λ_0, m_0, h e c.



(a) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda λ do fóton espalhado.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia cinética do elétron após a colisão.

(c) (1,0 ponto) Calcule a componente P_y do momento linear do elétron após a colisão.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) O comprimento de onda do fóton espalhado é dado pela fórmula do deslocamento de Compton.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta); \quad \theta = 60^\circ \Longrightarrow \lambda = \lambda_0 + \frac{h}{2m_0 c}$$

(b) Conservação de energia:

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda} + E_e \Longrightarrow K = E_e - m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + h/2m_0 c}.$$

(c) Por conservação de momento, a componente y do momento do elétron dever cancelar a componente y do momento do fóton espalhado. Assim,

$$P_y = \frac{h}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,60^\circ = \frac{h\sqrt{3}}{2\lambda} = \frac{h\sqrt{3}}{2\lambda_0 + h/m_0 c}.$$

Formulário

$1 \text{ nm} = 10^{-9}$ m; $\quad h = 4 \times 10^{-15}$ eV.s; $\quad c = 3 \times 10^{8}$ m/s; $\quad 1\text{Å} = 10^{-10}$ m;

$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$ J; $\quad f' = f\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$; $\quad$ ou $\quad f' = f\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$; $\quad E = \gamma m_0 c^2$; $\quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$; $\quad K = (\gamma - 1) m_0 c^2$;

$I_{total} = \sigma T^4$; $\quad \sigma = 6 \times 10^{-8}\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$; $\quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$;

$E_f = hf = hc/\lambda$; $\quad K_{máx} = hf - \phi$; $\quad \lambda = h/p$;

$\lambda = \lambda_0 + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do fóton.