Física IV - 4323204

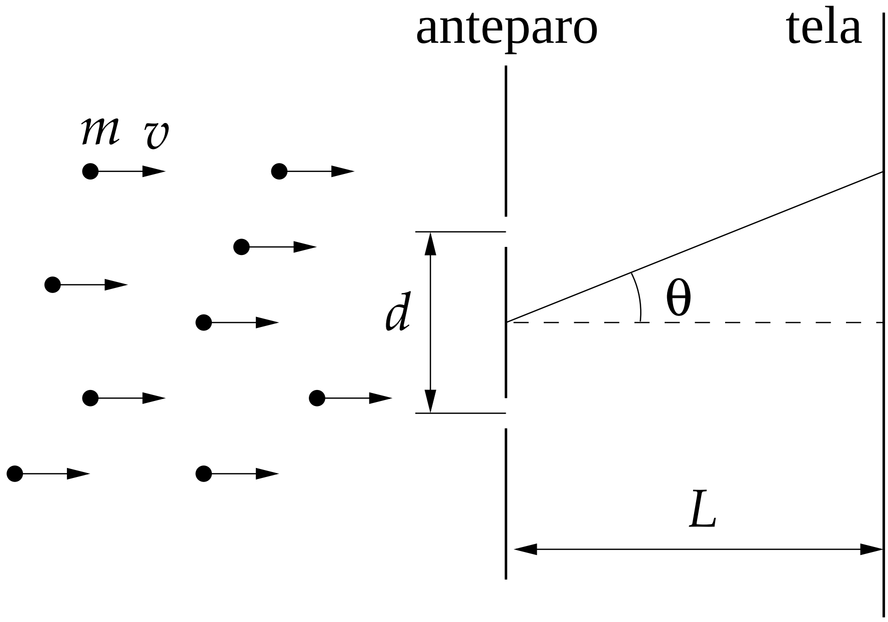
Escola Politécnica - 2015

GABARITO DA PS

3 de dezembro de 2015

QUESTÃO 1

Um feixe de elétrons de massa m e velocidade v incide normalmente sobre um anteparo com duas fendas separadas de d. Uma tela à distância $L \gg d$ registra a chegada dos elétrons.



(a) (0,5 pontos) Determine o comprimento de onda de de Broglie dos elétrons.

(b) (1,0 ponto) Determine os ângulos $\theta \geq 0$ para os quais não haverá registro de chegada de elétrons na tela. Justifique.

(c) (1,0 ponto) Se ao invés de duas fendas houver uma única fenda de largura d, determine os ângulos $\theta \geq 0$ (medidos como no item (b)) para os quais não haverá registro de chegada de elétrons na tela. Justifique.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 1

(a) Comprimento de onda de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \boxed{\frac{h}{mv}}$$

(b) Intensidade na interferência entre duas fendas distantes de d

$$I(\theta) = I(0)\cos^2\frac{\phi}{2}, \qquad \phi = 2\pi\left(\frac{d\,\mathrm{sen}\,\theta}{\lambda}\right).$$

Interferência destrutiva

$$\phi = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n \text{ inteiro.}$$

Portanto não haverá registro de elétrons na tela para $\theta \geq 0$ tais que

$$\boxed{\theta = \mathrm{arcsen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}\right]} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(c) Intensidade na difração por uma fenda de largura d

$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{\mathrm{sen}\,\beta/2}{\beta/2}\right)^2, \qquad \beta = 2\pi\left(\frac{d\,\mathrm{sen}\,\theta}{\lambda}\right).$$

Interferência destrutiva

$$\frac{\beta}{2} = n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Portanto não haverá registro de elétrons na tela para $\theta \geq 0$ tais que

$$\boxed{\theta = \mathrm{arcsen}\left(n\frac{\lambda}{d}\right)} \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

QUESTÃO 2

Num espalhamento Compton um fóton de comprimento de onda $\lambda = 2h/mc$ colide com um elétron em repouso perdendo metade de sua energia. As respostas devem ser dadas apenas em termos da constante de Planck h, massa de repouso do elétron m e velocidade da luz no vácuo c.

(a) (1,0 ponto) Calcule o comprimento de onda do fóton espalhado e seu ângulo de espalhamento.

(b) (0,5 pontos) Calcule a energia do elétron após a colisão.

(c) (1,0 ponto) Calcule o módulo do momento do elétron após a colisão.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

(a) Comprimento de onda do fóton após colisão

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{2} \Longrightarrow \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{2\lambda} \Longrightarrow \boxed{\lambda' = 2\lambda = \frac{4h}{mc}}$$

Ângulo de espalhamento

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \Longrightarrow \cos\phi = -1 \Longrightarrow \boxed{\phi = \pi}$$

(b) Conservação de energia

$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E_e \Longrightarrow \frac{mc^2}{2} + mc^2 = \frac{mc^2}{4} + E_e \Longrightarrow \boxed{E_e = \frac{5}{4}mc^2}$$

(c) Conservação de momento

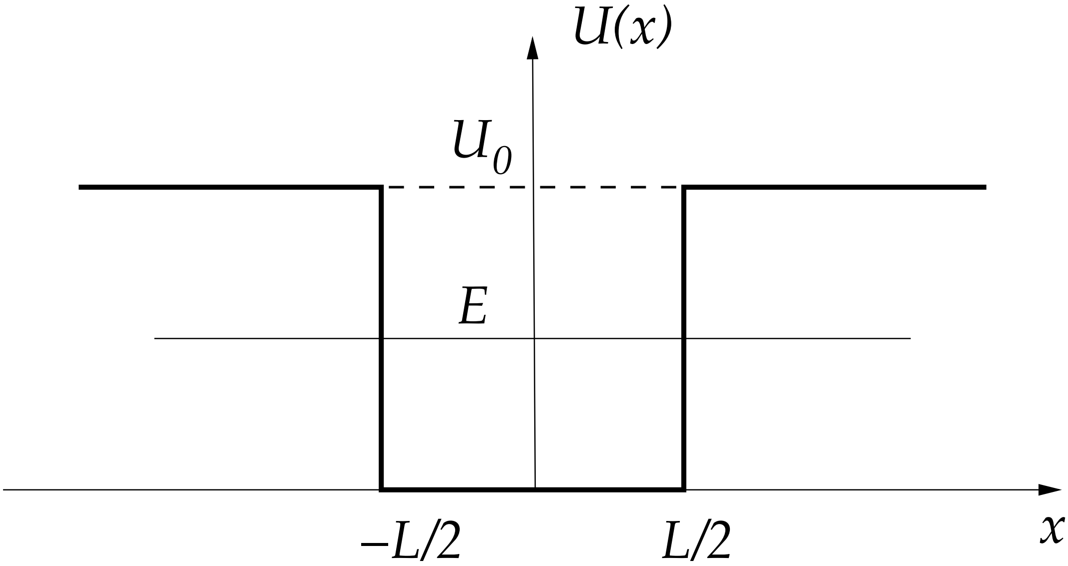
$$p_\gamma = -p'_\gamma + p_e \Longrightarrow \frac{h}{\lambda} = -\frac{h}{\lambda'} + p_e \Longrightarrow \boxed{p_e = \frac{3}{4}mc}$$

ou da expressão da energia relativística

$$p_e = \sqrt{E_e^2/c^2 - m^2c^2} = \frac{3}{4}mc.$$

QUESTÃO 3

Uma partícula de massa m encontra-se na presença de um poço de potencial quadrado.



A função de onda da partícula com com energia $E < U_0$ é dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\beta x} & \text{se } x < -L/2, \\ B\cos kx & \text{se } -L/2 < x < L/2, \\ Ae^{-\beta x} & \text{se } x > L/2. \end{cases}$$

(a) (1,0 ponto) Determine k e β.

(b) (1,0 ponto) Determine a razão entre A e B.

(c) (0,5 ponto) Determine a constante B. Não calcule as integrais deixando-as apenas indicadas. Se você não resolveu o item (b) coloque $A = \gamma B$ e deixe seu resultado em função de γ.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

(a) Equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$$

Na região $|x| > L/2$ temos $\psi = Ae^{\pm\beta x}$ e $U(x) = U_0$. Portanto obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\beta^2\psi) + U_0\psi = E\psi \Longrightarrow \boxed{\beta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}}$$

Na região $|x| < L/2$ temos $\psi = B\cos kx$ e $U(x) = 0$. Portanto obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2\psi) = E\psi \Longrightarrow \boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$$

(b) Continuidade da função de onda em $x = \pm L/2$

$$B\cos kL/2 = Ae^{-\beta L/2} \Longrightarrow \boxed{\frac{A}{B} = e^{\beta L/2}\cos kL/2}$$

(c) A normalização da função de onda fornece

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 2A^2\int_{L/2}^{\infty} e^{-2\beta x}dx + 2B^2\int_0^{L/2} \cos^2 kx dx.$$

Usando o resultado do item (b), podemos escrever

$$1 = 2B^2 e^{\beta L}\cos^2 kL/2 \int_{L/2}^{\infty} e^{-2\beta x}dx + 2B^2\int_0^{L/2}\cos^2 kx dx$$

$$\Longrightarrow \boxed{B = \left(2e^{\beta L}\cos^2 kL/2\int_{L/2}^{\infty} e^{-2\beta x}dx + 2\int_0^{L/2}\cos^2 kx dx\right)^{-1/2}}$$

QUESTÃO 4

(I) (1,5 pontos) Uma estrela de raio R irradia a uma temperatura absoluta T. Tratando a estrela como um corpo negro, determine a fórmula para a massa perdida pela estrela ΔM num intervalo de tempo Δt.

(II) (1,0 ponto) Segundo um observador num referencial inercial S, dois eventos A e B ocorrem sobre o eixo x sendo que o evento B ocorre 10^{-6} segundos depois de A e $x_A - x_B = 600$ metros. Existe um referencial inercial S' em que os eventos A e B são simultâneos? Caso afirmativo descreva como S' se desloca relativamente a S.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 4

(I) Potência irradiada pela estrêla

$$P = IA = (\sigma T^4)(4\pi R^2) = 4\pi\sigma T^4 R^2,$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Energia irradiada no intervalo Δt

$$\Delta E = P\Delta t = 4\pi\sigma T^4 R^2 \Delta t.$$

Equivalência entre massa e energia

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = \boxed{\frac{4\pi\sigma T^4 R^2 \Delta t}{c^2}}$$

(II) Usando a transformação de Lorentz

$$t'_B - t'_A = \gamma\left[(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)\right].$$

Para que $t'_A = t'_B$ devemos ter

$$v = \left(\frac{t_B - t_A}{x_B - x_A}\right)c^2 = \left(\frac{10^{-6}\ \mathrm{s}}{-600\ \mathrm{m}}\right)(3 \times 10^8\ \mathrm{m/s})c = \boxed{-\frac{c}{2}}$$

Portanto os eventos A e B são simultâneos no referencial S' que se move no sentido negativo do eixo x com metade da velocidade da luz.

Formulário

$I = I_0 \cos^2(\phi/2), \quad \phi = 2\pi d \,\text{sen}\,\theta/\lambda; \quad I = I_0 \left[\dfrac{\text{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = 2\pi a \,\text{sen}\,\theta/\lambda;$

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma\,(x' + ut')\,, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{ux'}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\ ;$$

$E = \gamma m_0 c^2; \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u}, \quad K = (\gamma - 1) m_0 c^2; \quad E_f = hf = hc/\lambda; \quad K_{máx} = hf - \phi;$

$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6 \times 10^{-8}\ \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}\ ; \quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}\ ;$

$\lambda = \lambda_0 + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do fóton; $\quad \lambda = h/p; \quad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$