Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2016

GABARITO DA P2

13 de outubro de 2016

Questão 1

Uma partícula 1 com massa de repouso m_0 e energia total igual a duas vezes sua energia de repouso colide com uma partícula 2, idêntica, em repouso. Após a colisão forma-se uma <u>única</u> partícula com massa de repouso M_0. Nos itens abaixo, expresse suas respostas em termos da velocidade da luz c e de m_0.

(a) (1,0 ponto) Calcule a velocidade v da partícula antes da colisão.

(b) (1,0 ponto) Calcule a velocidade V e a massa M_0 da partícula resultante.

(c) (0,5 ponto) Calcule a energia cinética da partícula resultante.

Solução da questão 1

(a) Antes da colisão a energia total é igual a $2m_0c^2$. Portanto,

$$\gamma m_0c^2 = 2m_0c^2 \Longrightarrow \gamma = 2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2 \Longrightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{3}}{2}c}.$$

(b) A conservação de energia fornece

$$\gamma m_0c^2 + m_0c^2 = \gamma' M_0c^2 \Longrightarrow 3m_0c^2 = \gamma' M_0c^2$$

$$\Longrightarrow 3m_0 = \gamma' M_0 \tag{1}$$

A conservação de momento fornece

$$\gamma m_0 v = \gamma' M_0 V \tag{2}$$

Dividindo a equação (2) pela equação (1) obtemos

$$\boxed{V = \frac{\gamma}{3}v = \frac{\sqrt{3}}{3}c}, \tag{3}$$

onde usamos γ e v calculados no item (a).

Tendo V calculamos γ',

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-1/3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \tag{4}$$

Finalmente, inserindo (4) na equação (1) obtemos

$$\boxed{M_0 = \sqrt{6}\, m_0}.$$

(c) A energia cinética K da partícula resultante é

$$K = (\gamma' - 1)M_0c^2 = (\frac{\sqrt{6}}{2} - 1)\sqrt{6}\, m_0c^2 = \boxed{(3-\sqrt{6})m_0c^2}.$$

Questão 2

Luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 410$ nm, proveniente de uma fonte com intensidade I, incide sobre três superfícies metálicas constituídas de lítio (Li), berílio (Be) e mercúrio (Hg). As funções de trabalho de cada um destes materiais são dadas por $\phi^{Li} = 2,3$ eV, $\phi^{Be} = 3,9$ eV e $\phi^{Hg} = 4,5$ eV, respectivamente.

(a) (1,0 ponto) Determine em que casos é possível observar o efeito fotoelétrico.

(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial necessária para freiar os fotoelétrons (potencial frenador ou potencial de corte) nos casos em que os fotoelétrons são observados, conforme o item (a).

(c) (0,5 ponto) Se ao invés da fonte com intensidade I tivéssemos utilizado uma fonte com intensidade $2I$, mas com o mesmo comprimento de onda de 410 nm, como mudariam os itens (a) e (b) e o número de fotoelétrons emitidos?

Solução da questão 2

(a) A energia cinética K dos fotoelétrons é dada por $K = hc/\lambda - \phi$. Para haver efeito fotoelétrico é necessário que $\phi \leq hc/\lambda$. No nosso caso

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{(4,1 \times 10^{-15})(3 \times 10^{8})}{4,1 \times 10^{-7}} = 3 \text{ eV}.$$

Comparando as três funções de trabalho com este valor temos,

$$\boxed{\phi^{Li} = 2,3 \text{ eV} < 3 \text{ eV} \Longrightarrow \text{há efeito fotoelétrico para o lítio}},$$

$$\phi^{Be} = 3,9 \text{ eV} > 3 \text{ eV} \Longrightarrow \text{não há efeito fotoelétrico},$$

$$\phi^{Hg} = 4,5 \text{ eV} > 3 \text{ eV} \Longrightarrow \text{não há efeito fotoelétrico}.$$

(b) A diferença de potencial V necessária para freiar os fotoelétrons (potencial de corte) do Li é dada por

$$eV = K = hc/\lambda - \phi^{Li} \Longrightarrow V = \frac{hc/\lambda - \phi^{Li}}{e} = \frac{0,7}{e}\text{ eV} = \boxed{0,7 \text{ volt}}.$$

(c) As respostas dos itens (a) e (b) não mudam. Para a resolução destes itens o que importa é a energia dos fótons. As duas fontes produzem luz com o mesmo comprimento de onda e portanto fótons de mesma energia. A fonte de maior intensidade produz mais fótons e portanto produzirá um maior número de fotoelétrons.

Questão 3

(I) Um farol A emite luz vermelha de frequência $f_1 = 4 \times 10^{14}$ Hz. Outro farol B, em repouso em relação ao farol A, emite luz verde de frequência $f_2 = 6 \times 10^{14}$ Hz. Um observador que se move ao longo da linha que une os farois A e B, com velocidade v em relação a eles, vê as luzes emitidas por A e B com a mesma cor.

(a) (0,5 ponto) Em que sentido se move o observador? De A para B, ou de B para A? Justifique.

(b) (1,0 ponto) Calcule a velocidade do observador em relação à velocidade da luz.

(II) (1,0 ponto) A emitância espectral $I(\lambda, T)$ de uma estrela atinge o máximo num comprimento de onda igual a 600 nm. Calcule a temperatura da estrela. Se ela tem raio $R = 10^9$ m calcule a potência total emitida pela estrela. Suponha que a estrela emite radiação como um corpo negro.

Solução da questão 3

(I) Efeito Doppler

(a) A mudança na frequência da luz dos faróis é devida ao efeito Doppler. Para as frequências das luzes dos farois se tornarem iguais a frequência do farol A deve aumentar e a do farol B diminuir, portanto o observador deve se aproximar de A e se afastar de B. Assim, o sentido do movimento é de B para A.

(b) Denotando f a frequência da luz observada, temos

$$f = f_1\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = f_2\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \Longrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

onde $\beta = v/c$. Portanto,

$$\frac{2}{3} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{5} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{1}{5}c}.$$

(II) Potência emitida pela estrela

A lei de deslocamento de Wien permite relacionar $\lambda_{\text{máx}}$ com a temperatura T.

$$\lambda_{\text{máx}} T = 3\times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K} \Longrightarrow T = \frac{3\times 10^{-3}}{6\times 10^{-7}} = \boxed{5\times 10^{3}\ \text{K}}.$$

A potência emitida pela estrela é

$$P = 4\pi R^2 I,$$

onde a intensidade total I é dada pela lei de Stefan-Boltzmann

$$I = \sigma T^4.$$

Portanto,

$$P = 4\pi R^2\sigma T^4 = 4\pi(10^9)^2(6\times 10^{-8})(5\times 10^3)^4 = \boxed{15\pi\times 10^{25}\ \text{W}}.$$

Questão 4

Considere um átomo de hidrogênio em repouso com massa total M_H. Suponha que o elétron deste átomo passou do primeiro estado excitado para o estado de energia mais baixa, através da emissão de um fóton. Utilize o modelo de Bohr para responder os itens abaixo. Forneça seus resultados apenas em termos de h, c, da massa de repouso do elétron m_0 e da constante de Rydberg R_H.

(a) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda do fóton emitido.

(b) (1,0 ponto) Ao emitir o fóton, o átomo de H deve recuar na direção oposta para que haja conservação de momento. A velocidade de recuo V do átomo de H é muito menor do que a velocidade da luz c. Calcule V.

(c) (1,0 ponto) Se o fóton emitido for espalhado por um elétron em repouso, qual será o maior valor possível $\lambda_{\text{máx}}$ do seu comprimento de onda?

Solução da questão 4

(a) O modelo de Bohr fornece $E_n = -hcR_H/n^2$. A energia E_γ do fóton emitido é

$$E_\gamma = E_2 - E_1 = -hcR_H\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{4}hcR_H.$$

O comprimento de onda deste fóton é

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{4}{3R_H}}.$$

(b) Por conservação de momento $p_\gamma = p_H$, onde p_γ é o momento do fóton emitido e p_H é o momento do átomo após a emissão. Como o átomo é não relativístico $p_H = M_H V$. Assim,

$$p_\gamma = p_H \Longrightarrow \frac{E_\gamma}{c} = M_H V \Longrightarrow \boxed{V = \frac{3hR_H}{4M_H}}.$$

(c) A fórmula de Compton,

$$\lambda\,' = \lambda + \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta),$$

mostra que $\lambda\,'$ é máximo para $\theta = \pi$. Neste caso

$$\lambda_{\text{máx}} = \lambda + \frac{2h}{m_0 c} = \boxed{\frac{4}{3R_H} + \frac{2h}{m_0 c}}.$$

Formulário

$1\ \text{nm} = 10^{-9}$ m, $h = 4,1 \times 10^{-15}$ eV$\cdot$ s, $c = 3 \times 10^{8}$ m/s, $E = hf = hc/\lambda$, $E = pc$,
$E_n = -hcR_H/n^2$, $f' = f\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$, ou $f' = f\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$, $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$,
$E = \gamma m_0 c^2$, $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{u}$, $K = (\gamma - 1) m_0 c^2$, $K_{máx} = hf - \phi$,
$\lambda = \lambda_0 + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>,
$I_{total} = \sigma T^4$, $\sigma = 6 \times 10^{-8} \dfrac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}^4}$, $\lambda_{\text{máx}} T = 3 \times 10^{-3}$ m $\cdot$ K .