Física IV - 4323204

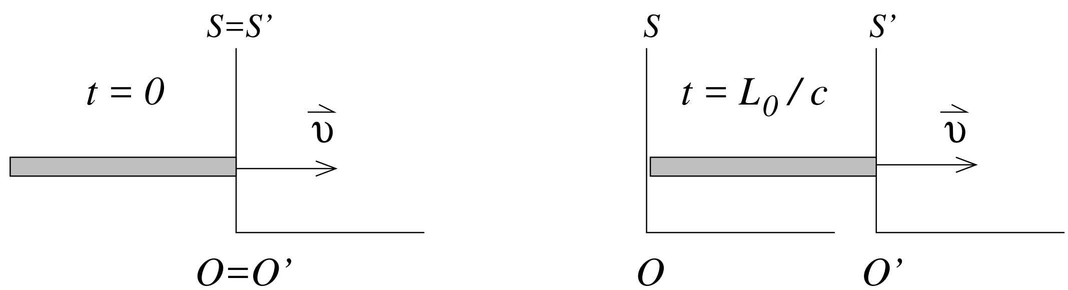
Escola Politécnica - 2016

GABARITO DA PR

16 de fevereiro de 2017

Questão 1

Uma espaçonave de comprimento próprio L_0 move-se com velocidade $\vec{v} = v\,\hat{\imath}$ em relação ao sistema inercial S. De acordo com um observador em repouso em S a espaçonave leva um intervalo de tempo igual a L_0/c para passar pela origem O de S, conforme a figura.



(a) (1,5 ponto) Calcule o módulo da velocidade da espaçonave v em termos de c.

(b) (1,0 ponto) Calcule o intervalo de tempo para a passagem da espaçonave pela origem O no referencial S' da espaçonave.

Solução da questão 1

(a) Para um observador em S a nave leva um intervalo de tempo igual a

$$\Delta T_0 = \frac{L}{v},$$

para passar por O, onde L é o comprimento da nave em S. É dado no problema que $\Delta T_0 = L_0/c$, além disto $L = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L_0$, onde L_0 é o comprimento próprio da espaçonave. Portanto,

$$\Delta T_0 = \frac{L}{v} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}\, L_0}{v} = \frac{L_0}{c} \Longrightarrow \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v} = \frac{1}{c} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{c}{\sqrt{2}}}.$$

Solução alternativa: A proa da nave passa por O em $t = t' = 0$. Em S' a popa da nave passa por O no instante $t' = L_0/v$. Em S a popa da nave passa por O em $t = L_0/c$ (dado do problema). A transformação de Lorentz para o tempo é

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Longrightarrow \frac{L_0}{v} = \frac{L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{c}{\sqrt{2}}}.$$

(b) Em S os eventos "passagem da proa por O" e "passagem da popa por O" ocorrem no mesmo ponto. Assim, o intervalo de tempo ΔT_0 entre estes dois eventos em S é o tempo próprio. No referencial S'

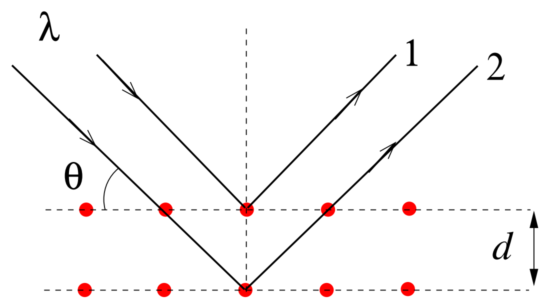
$$\Delta T = \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L_0/c}{\sqrt{1 - 1/2}} = \boxed{\frac{L_0\sqrt{2}}{c}}.$$

Solução alternativa: Um observador em S' vê a origem O de S passar pela nave com velocidade $-v$. O tempo medido por ele é

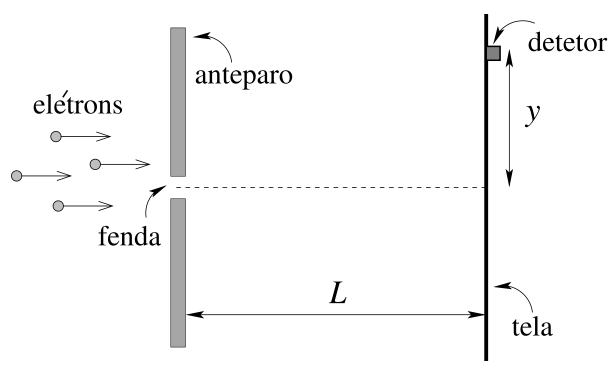
$$\Delta T = \frac{L_0}{v} = \frac{L_0}{c/\sqrt{2}} = \boxed{\frac{L_0\sqrt{2}}{c}}.$$

Questão 2

(I) (1,0 ponto) Uma onda plana de comprimento de onda λ incide sobre a superfície de um cristal, mostrado em corte transversal na figura. Deduza a relação que deve haver entre λ, θ e d para que os raios 1 e 2 mostrados na figura interfiram construtivamente (fórmula de Bragg-Williams).



(II) Elétrons podem exibir um comportamento ondulatório. Numa experiência de difração, elétrons <u>não relativísticos</u> com energia cinética K incidem sobre uma fenda de largura a. Um detetor sobre uma tela a uma distância $L >> a$ pode ser deslocado ao longo da direção y, conforme a figura.



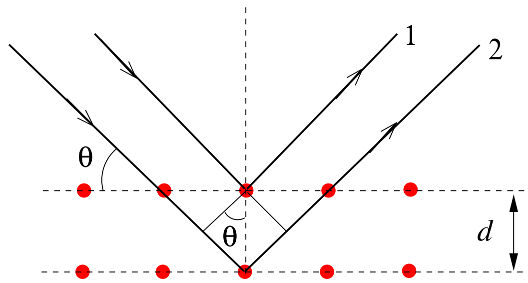
(a) (0,5 ponto) Expresse o comprimento de onda λ de de Broglie dos elétrons em termos da sua energia cinética K.

(b) (1,0 ponto) Qual é o menor valor para a posição y do detetor onde não são observados elétrons?

Solução da questão 2

(I) Fórmula de Bragg-Williams

Para haver interferência construtiva, a diferença de percurso entre os raios 1 e 2 que é $2d\,\mathrm{sen}\,\theta$ deve ser um múltiplo inteiro de λ.



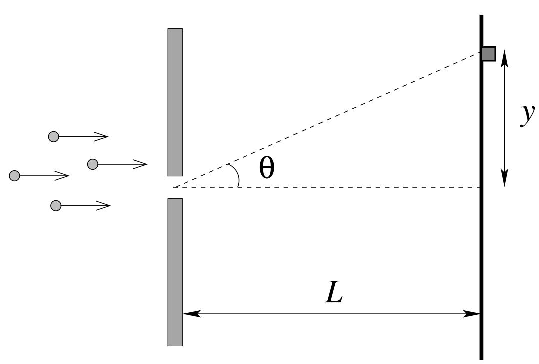
$$\boxed{2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda; \quad m = 1, 2, 3...}$$

(II) Difração de elétrons

(a) Para elétrons não relativísticos $K = p^2/2m$. Portanto,

$$p = \sqrt{2mK} \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}}}.$$

(b) Não vão chegar elétrons no detetor nos mínimos de difração.

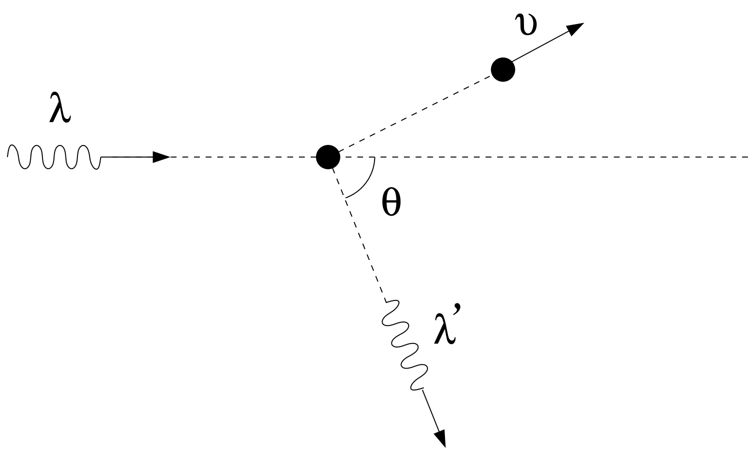


O primeiro mínimo ocorre para $\mathrm{sen}\,\theta = \lambda/a$. Como o ângulo é pequeno,

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L} = \frac{\lambda}{a} \Longrightarrow \boxed{y = \frac{L\lambda}{a} = \frac{Lh}{a\sqrt{2mK}}}.$$

Questão 3

Um fóton de comprimento de onda $\lambda = h/(2m_0c)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron, é espalhado por um elétron em repouso. O fóton espalhado tem comprimento de onda λ' e sua direção de propagação faz um ângulo θ com a direção de incidência. A energia cinética K do elétron após a colisão é igual a m_0c^2, conforme a figura.



Nos itens abaixo forneça suas respostas em termos de h, c e m_0 apenas.

(a) (1,0 ponto) Calcule o comprimento de onda λ' do fóton espalhado.

(b) (1,0 ponto) Calcule o ângulo de espalhamento θ do fóton.

(c) (0,5 ponto) Calcule o módulo da velocidade v do elétron espalhado.

Solução da questão 3

(a) A conservação de energia fornece

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma m_0 c^2 \Longrightarrow \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = (\gamma - 1)m_0c^2 \equiv K.$$

Substituindo os valores dados de λ e K obtemos

$$\frac{hc}{h/(2m_0c)} - \frac{hc}{\lambda'} = m_0c^2 \Longrightarrow \frac{hc}{\lambda'} = m_0c^2 \Longrightarrow \boxed{\lambda' = \frac{h}{m_0c}}.$$

(b) A fórmula de espalhamento de Compton fornece

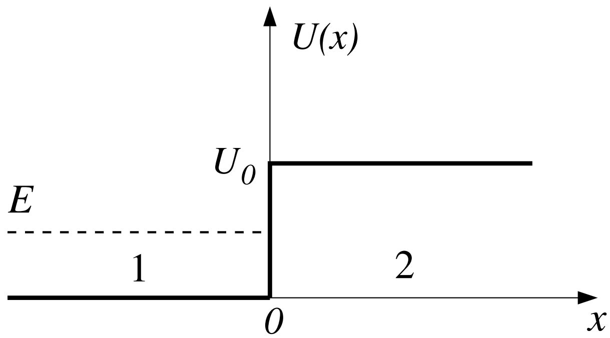
$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \Longrightarrow \frac{h}{m_0c} = \frac{h}{2m_0c} + \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}.$$

(c) A expressão da energia cinética permite calcular γ:

$$K = (\gamma - 1)m_0c^2 = m_0c^2 \Longrightarrow \gamma = 2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2 \Longrightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{3}\,c}{2}}.$$

Questão 4

Uma partícula de massa m e energia constante $E = U_0/2$ move-se sobre o eixo x na presença de um degrau de potencial.



$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) (1,0 ponto) Escreva as soluções gerais $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ da equação de Schrödinger nas regiões 1 ($x < 0$) e 2 ($x \geq 0$).

(b) (1,0 ponto) Escreva as condições de contorno que $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ devem satisfazer.

(c) (0,5 ponto) Determine $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ a menos de uma <u>única</u> constante multiplicativa.

Solução da questão 4

(a) A equação de Schrödinger pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\psi, \quad \text{onde} \quad E = \frac{U_0}{2}.$$

<u>Na região 1, $U = 0$</u>

$$\Longrightarrow \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = -\frac{mU_0}{\hbar^2}\psi_1 \equiv -k^2\psi_1, \quad \text{onde} \quad k = \frac{\sqrt{mU_0}}{\hbar}.$$

A solução geral da equação acima é

$$\boxed{\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}}.$$

<u>Na região 2, $U = U_0$</u>

$$\Longrightarrow \frac{d^2\psi_2}{dx^2} = +\frac{mU_0}{\hbar^2}\psi_2 \equiv k^2\psi_2, \quad \text{onde} \quad k = \frac{\sqrt{mU_0}}{\hbar}.$$

A solução da equação acima é

$$\boxed{\psi_2(x) = Ce^{-kx}}.$$

A solução De^{kx} não é aceitável porque ela diverge quando $x \to \infty$.

(b) As soluções $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ e suas derivadas satisfazem

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Longrightarrow A + B = C$$

$$\left.\frac{d\psi_1(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right|_{x=0} \Longrightarrow ikA - ikB = -kC \Longrightarrow A - B = iC$$

(c) As constantes A e B podem ser resolvidas em função de C.

$$\left.\begin{array}{l} A + B = C \\ A - B = iC \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \frac{1}{2}(1+i)C, \quad B = \frac{1}{2}(1-i)C$$

$$\Longrightarrow \boxed{\psi_1(x) = C(\cos(kx) - \operatorname{sen}(kx)) \quad \text{e} \quad \psi_2(x) = Ce^{-kx}}.$$

Formulário

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma\,(x' + ut')\,, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{ux'}{c^2}\right), \end{cases}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \ell = \ell_0\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

$$I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = 2\pi\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\lambda}, \quad E = \gamma m_0 c^2; \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}; \quad K = (\gamma - 1)m_0c^2;$$

$E_f = hf = hc/\lambda$; $\lambda = h/p$; $\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$