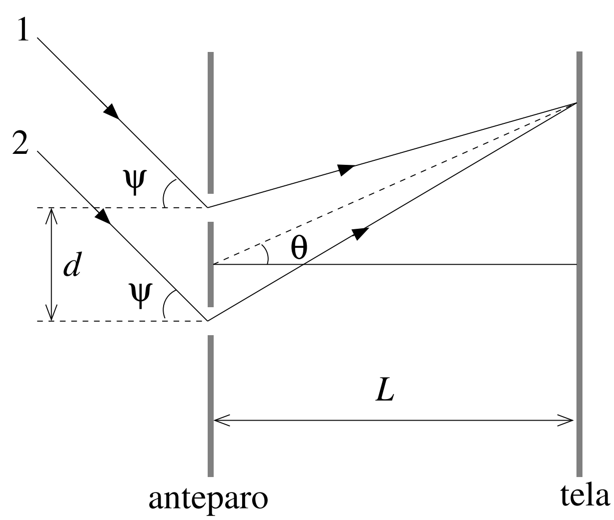
Física IV - 4323204

GABARITO DA PS

8 de dezembro de 2016

Questão 1

(I) (1,0 ponto) Uma onda plana monocromática de comprimento de onda λ incide com um ângulo ψ sobre um anteparo com duas fendas separadas por uma distância d, conforme a figura.



A distância L entre este anteparo e uma tela é tal que $L >> d$. Determine a condição que θ deve satisfazer para que os raios 1 e 2 interfiram construtivamente sobre a tela.

(II) (1,5 ponto) A superfície de um metal que apresenta efeito fotoelétrico é iluminada com luz monocromática de comprimento de onda ajustável λ. Quando $\lambda = \lambda_1$, o potencial de corte dos fotoelétrons é V_1. Quando $\lambda = \lambda_2$, o potencial de corte dos fotoelétrons é V_2. Usando estes dados, a carga e do elétron e a velocidade da luz c calcule a constante de Planck h.

Solução da questão 1

(I) Interferência

A diferença de percurso entre os raios 1 e 2 é $d \operatorname{sen}\psi + d \operatorname{sen}\theta$. Para haver interferência construtiva esta diferença deve ser igual a um número inteiro de comprimentos de onda λ.

$$\boxed{d(\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\theta) = m\lambda \quad \text{com} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...}$$

(II) Efeito fotoelétrico

O potencial de corte é a diferença de potencial V necessária para levar um fotoelétron ao repouso. Por conservação de energia, $eV = E_{cin} = hc/\lambda - \phi$, onde E_{cin} é a energia cinética do fotoelétron, hc/λ é a energia do fóton e ϕ é a função de trabalho do metal. Portanto,

$$eV_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - \phi \tag{1}$$

$$eV_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - \phi \tag{2}$$

Subtraindo as duas equações obtemos

$$e(V_1 - V_2) = hc\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}\right) \Longrightarrow \boxed{h = \frac{e(V_1 - V_2)\lambda_2\lambda_1}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}}.$$

Questão 2

Uma espaçonave que viaja se afastando com velocidade $c\widehat{\imath}/2$ em relação à Terra, passa pela origem do referencial da Terra em $t = 0$ s. Neste mesmo instante, a espaçonave dispara um míssil, de comprimento próprio l_0, com velocidade $c\,\widehat{\imath}/2$ em relação à espaçonave.

(a) (1,0 ponto) Calcule a velocidade do míssel em relação à Terra.

(b) (0,5 ponto) Calcule o comprimento do míssel depois do disparo no referencial da espaçonave.

(c) (1,0 ponto) Em um determinado instante o míssel emite um sinal luminoso de frequência f. Qual é a frequência deste sinal recebido na Terra?

Solução da questão 2

(a) A velocidade do míssel em relação à Terra é obtida com a fórmula de adição de velocidades

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \dfrac{uv'_x}{c^2}} = \frac{c/2 + c/2}{1 + \dfrac{(c/2)(c/2)}{c^2}} = \boxed{\frac{4c}{5}}.$$

(b) O comprimento do míssel no referencial da espaçonave é

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c} = l_0\sqrt{1 - (1/2c)^2/c^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} l_0}.$$

(c) O míssel se <u>afasta</u> da Terra com velocidade $v = 4c/5$. Portanto,

$$f' = f\sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = f\sqrt{\frac{c - 4c/5}{c + 4c/5}} = \boxed{\frac{f}{3}}.$$

Questão 3

Uma estrela tem massa $M(t)$, raio R e temperatura T.

(a) (1,0 ponto) Calcule a potência térmica irradiada por esta estrela.

(b) (1,0 ponto) Calcule a massa que esta estrela perde por unidade de tempo devido à energia térmica irradiada.

(c) (0,5 ponto) Calcule o tempo τ para que a massa desta estrela diminua de 1%.

Solução da questão 3

(a) A potência total irradiada é calculada através da lei de Stefan-Boltzmann.

$$\boxed{P = A\sigma T^4 = 4\pi R^2 \sigma T^4}.$$

(b) A relação entre energia e massa é

$$E = Mc^2 \Longrightarrow \frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dM}{dt} \Longrightarrow \boxed{\frac{dM}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2}P = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{c^2}}.$$

(c) O tempo τ para que a massa da estrela diminua de 1% é tal que

$$\frac{dM}{dt}\tau = 0{,}01M \Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{0{,}01M}{dM/dt}}.$$

Questão 4

Considere a função de onda independente do tempo $\psi(x)$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} C\left[1 + \dfrac{x}{a}\right]^{1/2} & \text{se} \quad -a \leq x \leq 0, \\ C\left[1 - \dfrac{x}{b}\right]^{1/2} & \text{se} \quad 0 \leq x \leq b, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde a e b são constantes positivas e C é a constante de normalização.

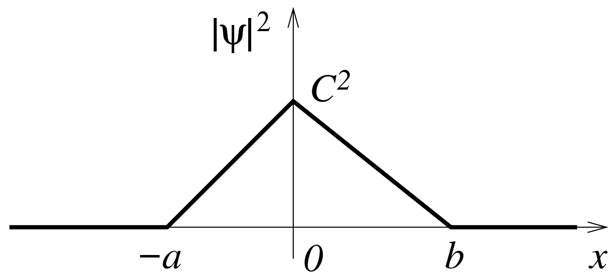
(a) (0,5 ponto) Calcule C.

(b) (1,0 ponto) Qual é a probabilidade de encontrarmos a partícula na metade positiva do eixo x?

(c) (1,0 ponto) Qual é o valor médio da posição da partícula?

Solução da questão 4

(a) A densidade de probabilidade $|\psi|^2$ é mostrada na figura abaixo.



A condição de normalização $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$ permite calcular C. A integral pode ser feita graficamente:

$$1 = \text{ área } = \frac{C^2(a+b)}{2} \Longrightarrow \boxed{C = \sqrt{\frac{2}{a+b}}}.$$

(b) Do gráfico obtemos

$$\boxed{P(x \geq 0) = \frac{C^2 b}{2} = \frac{b}{a+b}}.$$

(c) O valor médio da posição da partícula é

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dx = \frac{2}{a+b}\left\{\int_{-a}^{0}\left(x + \frac{x^2}{a}\right)dx + \int_{0}^{b}\left(x - \frac{x^2}{b}\right)dx\right\}$$

$$= \frac{2}{a+b}\left\{-\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{6}\right\} = \frac{(b+a)(b-a)}{3(a+b)} = \boxed{\frac{b-a}{3}}.$$

Formulário

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \dfrac{uv_x'}{c^2}}, \quad \ell = \ell_0\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad E = mc^2,$$

$$f' = f\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}; \quad \text{ou} \quad f' = f\sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad I = \sigma T^4,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$