Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2017

GABARITO DA P1

31 de agosto de 2017

Questão 1

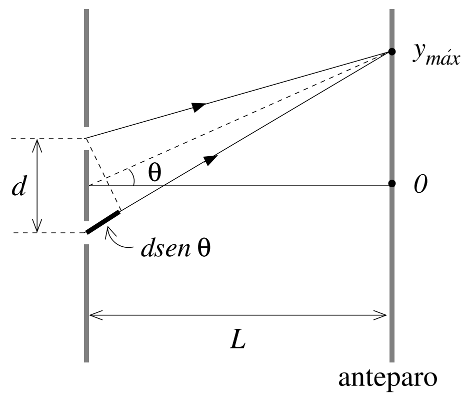
(I) (1,0 ponto) Numa experiência de Young, duas fendas separadas por uma distância de $d = 1{,}5$ mm são iluminadas com luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m. Observam-se franjas de interferência num anteparo distante de $L = 3$ m do plano das fendas. Determine, em metros, o espaçamento entre estas franjas. Despreze efeitos de difração e lembre que para ângulos pequenos, $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta$.

(II) (1,5 ponto) Em um outro experimento, as duas fendas do item (a) são substituídas por uma <u>única</u> fenda de largura $a = 2 \times 10^{-4}$ m. Determine, em metros, a largura do máximo central da figura de difração observada no anteparo.

<u>Sugestão:</u> substitua os valores numéricos apenas na resposta final.

Solução da questão 1

(I) Dupla fenda



Os máximos de interferência ocorrem quando

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

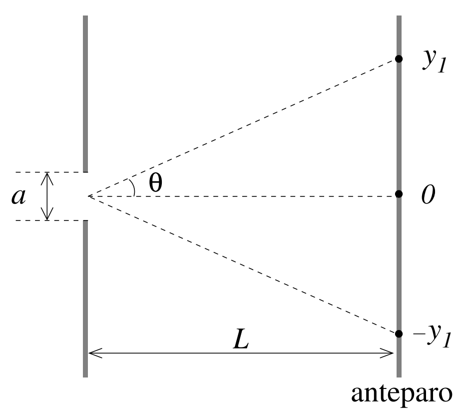
para ângulos pequenos $\mathrm{sen}\,\theta \approx \tan\theta = y_{máx}/L$.

$$y_{máx} \approx \frac{m\lambda L}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

O espaçamento entre as franjas é

$$\Delta y_{máx} = \frac{\lambda L}{d} = \frac{(6\times 10^{-7})3}{1,5\times 10^{-3}} = \boxed{1,2\times 10^{-3}\ \ \mathrm{m}}.$$

(II) Fenda única



A intensidade da figura de difração é dada por

$$I = I_0\left[\frac{\mathrm{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = 2\pi\frac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{\lambda}.$$

Os mínimos ocorrem quando $\beta/2 = m\pi$ com $m = \pm 1, \pm 2, ...$, ou seja para

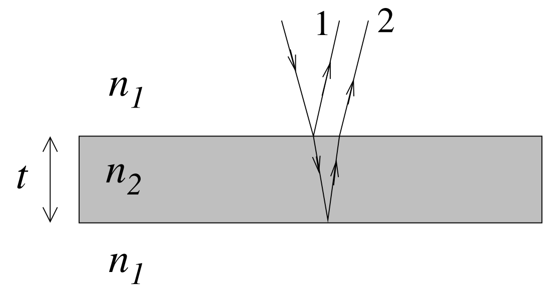
$$\frac{m\lambda}{a} = \mathrm{sen}\,\theta \approx \frac{y_m}{L} \Longrightarrow y_m = \frac{m\lambda L}{a}$$

A largura do máximo central é distância entre os dois primeiros mínimos localizados em y_1 e $y_{-1} = -y_1$.

$$y_1 - (-y_1) = 2y_1 = \frac{2\lambda L}{a} = \frac{2(6\times 10^{-7})3}{2\times 10^{-4}} = \boxed{1,8\times 10^{-2}\ \ \mathrm{m}}.$$

Questão 2

(I) Um filme fino de espessura t variável e índice de refração n_2 é iluminado por luz monocromática de comprimento de onda que no vácuo é igual a λ_0. O filme encontra-se imerso em um meio cujo índice de refração $n_1 < n_2$. Observa-se a interferência dos raios 1 e 2 provenientes da reflexão da luz nas superfícies superior e inferior do filme, conforme a figura. Considere incidência normal.



(a) (1,0 ponto) Calcule o valor a mínimo da espessura do filme para que a intensidade da luz observada seja máxima.

(b) (0,5 ponto) Calcule o valor b mínimo da espessura do filme para que a intensidade da luz observada seja mínima.

(II) (1,0 ponto) Numa experiência de difração com um cristal foi utilizado um feixe de raios X com <u>dois</u> comprimentos de onda. Os menores ângulos para os quais se observaram máximos foram $\theta_1 = 0,014$, $\theta_2 = 0,021$, $\theta_3 = 0,028$ e $\theta_4 = 0,042$, todos eles medidos em radianos. Sabendo-se que a distância entre os planos de difração do cristal é 1 nm (10^{-9} m), determine os comprimentos de onda λ_1 e λ_2 dos raios X do feixe. <u>Observação:</u> para ângulos pequenos $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$.

Solução da questão 2

(I) Filme fino

(a) Para a intensidade da luz ser máxima é necessário haver interferência construtiva entre os raios 1 e 2.

$$2\pi\left(\frac{2t}{\lambda_2}\right)-\pi=2\pi m \Longrightarrow t=\frac{\lambda_2}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\lambda_0}{2n_2}\left(m+\frac{1}{2}\right).$$

A espessura mínima a é obtida com $m=0$.

$$\boxed{a=\frac{\lambda_0}{4n_2}}.$$

(b) Para a intensidade da luz ser mínima é necessário haver interferência destrutiva entre os raios 1 e 2.

$$2\pi\left(\frac{2t}{\lambda_2}\right)-\pi=(2m+1)\pi \Longrightarrow t=\frac{\lambda_2}{2}(m+1)=\frac{\lambda_0}{2n_2}(m+1).$$

A espessura mínima b é obtida com $m=0$.

$$\boxed{b=\frac{\lambda_0}{2n_2}}.$$

(II) Difração de raios X

Para ângulos pequenos $\operatorname{sen}\theta\approx\theta$ e a lei de Bragg: $2d\operatorname{sen}\theta=m\lambda;\quad m=1,2,3...$ fornece

$$\theta\approx\frac{m\lambda}{2d}.$$

Nesta aproximação, os ângulos correspondentes aos máximos são múltiplos inteiros de $\lambda/2d$. Assim, os ângulos θ_1 e θ_3 estão associados ao comprimento λ_1 e os ângulos θ_2 e θ_4 estão associados ao comprimento λ_2.

$$\lambda_1=2d\theta_1=2(10^{-9})0,014=\boxed{2,8\times10^{-11}\text{ m}}$$

$$\lambda_2=2d\theta_2=2(10^{-9})0,021=\boxed{4,2\times10^{-11}\text{ m}}$$

Questão 3

Uma espaçonave parte da Terra no instante $t = 0$ e mantém sua jornada em linha reta com velocidade escalar v em direção a uma estação espacial que se localiza a uma distância D da Terra segundo observadores na Terra. Considere v próxima à velocidade da luz e despreze efeitos de aceleração da espaçonave.

(a) (1,0 ponto) Calcule o tempo necessário para a espaçonave atingir a estação segundo seu comandante.

(b) (1,5 ponto) No instante em que atinge a estação, a espaçonave emite um sinal luminoso na direção da Terra e continua sua viagem em linha reta. Segundo o comandante, qual é o intervalo de tempo entre a emissão e a chegada deste sinal à Terra e quanto a espaçonave se afastou da estação espacial neste mesmo intervalo de tempo?

Solução da questão 3

(a) Para o comandante da nave a partida da Terra e a chegada à estação espacial são dois eventos que ocorrem no mesmo ponto. O intervalo de tempo entre eles é o tempo próprio ΔT_0 que se relaciona com o intervalo $\Delta T_{Terra} = D/v$ medido na Terra através de

$$\Delta T_{Terra} = \frac{\Delta T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Longrightarrow \boxed{\Delta T_0 = \frac{D\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v}}$$

(b) Para o comandante, o sinal de luz vai percorrer a distância contraída $D' = D\sqrt{1 - v^2/c^2}$ mais o quanto a Terra se afastou até o sinal chegar até ela. Assim,

$$\Delta t' = \frac{D\sqrt{1 - v^2/c^2} + v\Delta t'}{c} \Longrightarrow \boxed{\Delta t' = \frac{D}{c}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}},$$

ou usando transformações de Lorentz

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\text{emissão luz em S}}: & (x_E, t_E) = (D, D/v), \\ \underline{\text{chegada da luz em S}}: & (x_C, t_C) = (0, D/v + D/c). \end{array}\right\} \Longrightarrow (\Delta x, \Delta t) = (-D, D/c),$$

Portanto,

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{D}{c} + \frac{vD}{c^2}\right) \Longrightarrow \boxed{\Delta t' = \frac{D}{c}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}}.$$

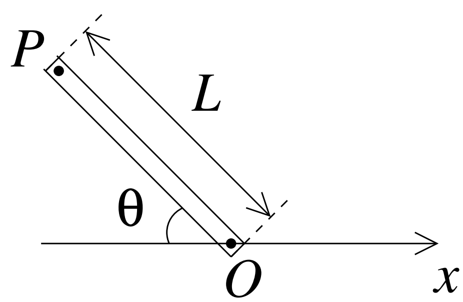
No intervalo de tempo $\Delta t'$, segundo o comandante, a nave estará a uma distância

$$\boxed{d' = v\Delta t' = \frac{Dv}{c}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}}$$

da estação espacial.

Questão 4

Uma barra de comprimento próprio L, orientada segundo um ângulo θ em relação ao eixo x está em repouso em um sistema inercial S, conforme a figura. Considere um sistema S' que se move com velocidade constante $\vec{v} = u\,\hat{\imath}$ em relação a S. Nos itens abaixo expresse suas respostas em termos de L, u, V, θ e da velocidade da luz c.



(a) (1,0 ponto) Qual é o comprimento L' da barra no sistema S'?

(b) (1,0 ponto) Qual é o ângulo de orientação θ' da barra no sistema S'?

(c) (0,5 ponto) Suponha agora que uma partícula relativística se move ao longo da barra com velocidade V, medida em S, no sentido de P para O. Quais são as componentes do vetor velocidade desta partícula para um observador em S'?

Solução da questão 4

(a) No sistema S' o comprimento da barra é $L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2}$, onde L_x' e L_y' são as projeções de L' sobre eixos x' e y', respectivamente.

$$L_y' = L_y = L \operatorname{sen}\theta; \quad L_x' = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, L\cos\theta$$

$$\Longrightarrow L' = \sqrt{L_y'^2 + L_x'^2} = \boxed{L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta}}.$$

(b) O ângulo θ' é obtido de

$$\tan\theta' = \frac{L_y'}{L_x'} = \frac{L\operatorname{sen}\theta}{L\cos\theta\sqrt{1-u^2/c^2}} \Longrightarrow \boxed{\theta' = \arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)}.$$

(c) A velocidade da partícula em S é

$$\vec{V} = V\cos\theta\,\widehat{\imath} - V\operatorname{sen}\theta\,\widehat{\jmath}.$$

Usando as fórmulas de transformação de velocidades obtemos

$$V_x' = \frac{V_x - u}{1 - uV_x/c^2} = \boxed{\frac{V\cos\theta - u}{1 - uV\cos\theta/c^2}},$$

$$V_y' = \frac{V_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uV_x/c^2} = \boxed{\frac{-V\operatorname{sen}\theta\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uV\cos\theta/c^2}}.$$

Formulário

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(x - ut\right), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \\ v'_y = \dfrac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}, \\ v'_z = \dfrac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}. \end{cases}$$

O referencial S' coincide com S em $t = t' = 0$ e se move em relação a S com velocidade $\vec{u} = u\,\hat{\imath}$.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \ell = \ell_0\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

$$I = I_0\cos^2(\phi/2), \quad I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad I = I_0\cos^2(\phi/2)\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2,$$

$$\phi = 2\pi d\operatorname{sen}\theta/\lambda, \quad \beta = 2\pi a\operatorname{sen}\theta/\lambda, \quad \lambda = \lambda_0/n, \quad 2d\operatorname{sen}\theta = m\lambda.$$