Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2017

GABARITO DA P2

19 de outubro de 2017

Questão 1

Uma partícula instável, de massa de repouso M_0, inicialmente em repouso, decai produzindo duas partículas idênticas. Suponha que a massa de repouso m_0 e a energia cinética K de *cada uma das partículas* finais sejam conhecidas. Considere também que o sistema permanece isolado ao longo de todo o processo.

(a) (1,0 ponto) Seja v a velocidade de uma das partículas de massa de repouso m_0. Calcule v/c, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Expresse sua resposta em termos de m_0, K e c.

(b) (1,0 ponto) Calcule o valor da massa M_0, expressando sua resposta em termos de m_0, K e c.

(c) (0,5 ponto) Determine v, quando $m_0 = 0$.

Solução da questão 1

(a) Usando $E = K + m_0c^2$ e expressando E em termos de $\beta \equiv v/c$ ($E = \gamma(\beta)m_0c^2$), teremos

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = K + m_0c^2.$$

Resolvendo para β, teremos

$$\boxed{\beta = \sqrt{\frac{K^2 + 2Km_0c^2}{(K+m_0c^2)^2}}}.$$

(b) Usando conservação de energia,

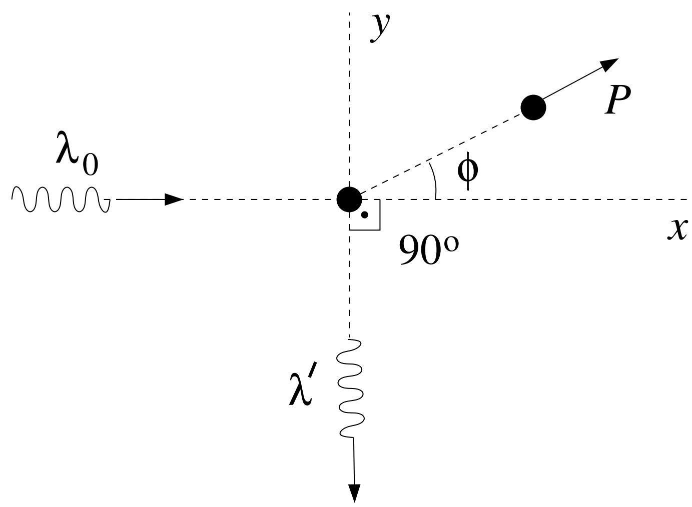
$$M_0c^2 = 2(K + m_0c^2).$$

$$\boxed{M_0 = \frac{2K}{c^2} + 2m_0}.$$

(c) Quando $m_0 = 0$ teremos, de acordo com o item (a), $\boxed{\beta = 1 \Longrightarrow v = c}$, como era de se esperar. Na relatividade partículas com massa nula só podem se deslocar com a velocidade da luz.

Questão 2

Um fóton de comprimento de onda λ_0 incide sobre um elétron em repouso que possui massa de repouso igual a m_0, conforme a figura. Após o espalhamento, o fóton adquire um comprimento de onda λ' e é espalhado de um ângulo de 90° em relação ao eixo x (direção de incidência) e o elétron se move com momento de módulo P, formando um ângulo $\phi \neq 0$ em relação ao eixo x. Expresse os resultados apenas em termos de h, c, λ_0 e m_0.



(a) (0,5 ponto) Qual é o comprimento de onda λ' do fóton espalhado?

(b) (1,0 ponto) Determine a energia cinética do elétron após o espalhamento.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor momento linear do elétron após o espalhamento.

Solução da questão 2

(a) O comprimento de onda do fóton espalhado é dado, para um ângulo de espalhamento igual a 90°, por

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos(90°)) = \boxed{\lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}}.$$

(b) A energia cinética do elétron $K = E_e - m_0 c^2$, onde E_e é a energia do elétron após a colisão, é calculada através da conservação de energia.

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E_e \Longrightarrow K = E_e - m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda'} = \boxed{\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + h/m_0 c}}.$$

(c) O vetor momento linear do elétron é obtido através da conservação de momento.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{eixo } x\text{:} & \dfrac{h}{\lambda_0} = P_x \\ \text{eixo } y\text{:} & 0 = P_y - \dfrac{h}{\lambda'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{P} = P_x \,\widehat{\imath} + P_y \,\widehat{\jmath} = \frac{h}{\lambda_0}\,\widehat{\imath} + \frac{h}{\lambda'}\,\widehat{\jmath} = \boxed{\frac{h}{\lambda_0}\,\widehat{\imath} + \frac{h}{\lambda_0 + h/m_0 c}\,\widehat{\jmath}}.$$

Questão 3

Uma estrela esférica de raio R em equilíbrio térmico à temperatura T emite radiação térmica.

(a) (1,0 ponto) Supondo que a estrela emita energia térmica como um corpo negro, calcule a quantidade de massa Δm perdida pela estrela durante um intervalo de tempo Δt.

(b) (1,5 ponto) Um laboratório na Terra observa que o comprimento de onda do máximo da distribuição de radiação térmica da estrela é $\lambda_{máx}^{Terra}$. Supondo que a estrela esteja se afastando da Terra com velocidade $v = 0,6c$, calcule sua temperatura.

Solução da questão 3

(a) A potência total irradiada pela estrela é

$$U = (4\pi R^2)I = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Portanto, a energia irradiada em Δt é $U\Delta t$ e a quantidade de massa perdida é

$$\boxed{\Delta m = \frac{U\Delta t}{c^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4 \Delta t}{c^2}}.$$

(b) Devido ao efeito Doppler (estrela se afastando), o comprimento de onda observado na Terra será maior do que o comprimento de onda $\lambda_{máx}^{Estrela}$ emitido pela estrela.

$$\lambda_{máx}^{Terra} = \lambda_{máx}^{Estrela} \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{1/2} = \lambda_{máx}^{Estrela} \left(\frac{1 + 0,6}{1 - 0,6}\right)^{1/2} = 2\lambda_{máx}^{Estrela}.$$

A temperatura da estrela é calculada através da lei de deslocamento de Wien.

$$\lambda_{máx}^{Estrela} T = 3 \times 10^{-3} \Longrightarrow T = \frac{3 \times 10^{-3}}{\lambda_{máx}^{Estrela}} = \boxed{\frac{6 \times 10^{-3}}{\lambda_{máx}^{Terra}} \text{ K}},$$

com $\lambda_{máx}^{Terra}$ medido em metros.

Questão 4

(I) Um feixe de luz de comprimento de onda λ e intensidade I, incide sobre uma placa de área A, no interior de uma célula fotoelétrica. O material da placa possui função trabalho ϕ.

(a) (0,5 ponto) Calcule e energia e o módulo do momento dos fótons incidentes.

(b) (0,5 pontos) Calcule o número N de fótons incidentes sobre a placa em um intervalo de tempo Δt.

(c) (0,5 pontos) Determine a condicão que deve ser satisfeita pelo valor de λ para que sejam ejetados elétrons do material.

(II) Um átomo de hidrogênio possui um elétron na camada $n = 2$.

(a) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda do fóton emitido quando este elétron faz uma transição da camada $n = 2$ para a camada $n = 1$

(b) (0,5 ponto) Determine a energia mínima de um fóton incidente para remover um elétron da camada $n = 2$ do átomo de hidrogênio (Esta é a energia para ionizar o átomo de hidrogênio com o elétron neste nível excitado.).

Solução da questão 4

(I) Efeito fotoelétrico

(a) Energia do fóton (relação de Planck-Einstein): $\boxed{E = hf = hc/\lambda}$. Momento do fóton (relação de de Broglie): $\boxed{p = h/\lambda}$.

(b) A intensidade I é a energia por unidade de tempo, por unidade de área, incidente sobre a placa. Portanto a energia total em um intervalo de tempo Δt é $U = I\,A\,\Delta t$. Como a energia de cada fóton é $E = hc/\lambda$, o número de fótons é

$$N = \frac{I\,A\,\Delta t}{E} = \boxed{\frac{I\,A\,\lambda}{hc}\,\Delta t}.$$

(c) Para que sejam ejetados elétrons do material, a energia do fóton deve ser maior do que a função trabalho do material, ou seja,

$$E > \phi \implies \frac{hc}{\lambda} > \phi \implies \boxed{\lambda < \frac{hc}{\phi}}.$$

(II) Átomo de hidrogênio

(a) A energia do fóton emitido é igual à diferença de energia entre os níveis com $n = 2$ e $n = 1$.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = -hcR_H\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right] = \frac{3hcR_H}{4} \implies \boxed{\lambda = \frac{4}{3R_H}}.$$

(b) A energia necessária para arrancar um elétron no nível com $n = 2$ é

$$\boxed{E = E(n=\infty) - E(n=2) = hcR_H\frac{1}{2^2}}.$$

Formulário

Efeito Doppler em termos do comprimento de onda: $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$ ou $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$, $\quad \lambda = c/f, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}, \quad K = (\gamma - 1) m_0 c^2,$

$\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad E = hf = hc/\lambda, \quad p = h/\lambda, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_n = -hcR_H/n^2,$

$\lambda' = \lambda_0 + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>,

$I(\lambda, T) = \dfrac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left[\exp\left(\dfrac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]}, \quad I_{total} = \sigma T^4, \quad \lambda_{máx} T = 3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}\ .$