Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2017

PR – 22 de fevereiro de 2018

Questão 1

Duas naves espaciais A e B de mesmo comprimento próprio L_0 viajam em sentidos opostos, ambas com a mesma velocidade escalar v em relação à Terra.

(a) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de cada nave medido por um observador na Terra.

(b) (1,0 ponto) No instante $t = 0\,\mathrm{s}$, medido no referencial da Terra, as frentes (proas) das naves estão alinhadas. Em que instante, também medido no referencial da Terra, as traseiras (popas) das naves estarão alinhadas?

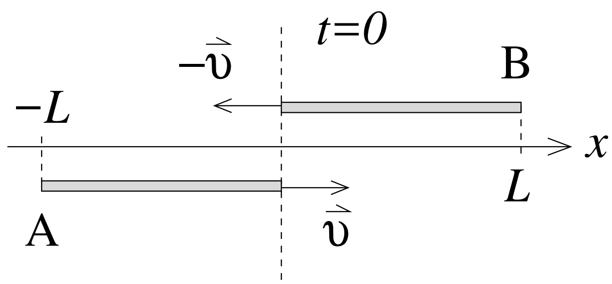
(c) (1,0 ponto) Para $L_0 = 100$ m e $v = 0,5c$, onde c é a velocidade da luz, calcule a velocidade e o comprimento da nave B medidos por um observador da nave A.

Solução da questão 1

(a) O comprimento L das naves no referencial da Terra é

$$\boxed{L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

(b) Em $t=0$ as proas das naves A e B estão alinhadas conforme a figura.



As equações horárias das popas são

$$x_A = -L + vt$$

$$x_B = L - vt$$

As popas vão se encontrar quando

$$x_A = x_B \Longrightarrow 2L = 2vt \Longrightarrow \boxed{t = \frac{L}{v}}.$$

(c) Para calcular a velocidade e o comprimento da nave B em relação à nave A colocamos um referencial S' fixo na nave A. A velocidade deste referencial em relação ao referencial da Terra é $\vec{u} = 0,5c\,\hat{\imath}$. A velocidade da nave B medida pela nave A é

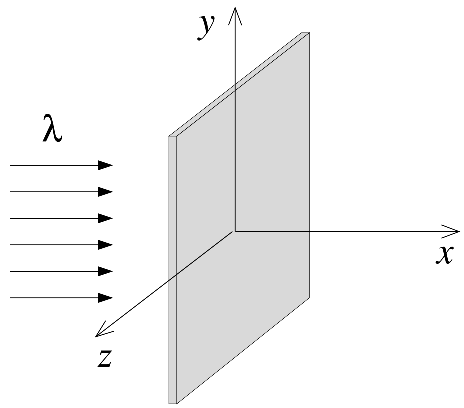
$$v'_B = \frac{v_B - u}{1 - v_B u/c^2} = \frac{-0,5c - 0,5c}{1-(-0,5c)(0,5c)/c^2} = \boxed{-0,8c}$$

O comprimento da nave B medido pela nave A é

$$L = L_0\sqrt{1-(v'_B/c)^2} = 100\sqrt{1-(0,8)^2} = \boxed{60\text{ m}}.$$

Questão 2

Uma placa quadrada muito fina com lado $L = 1$ m e massa $m = 1$ kg é irradiada no seu lado esquerdo por uma luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 660$ nm e intensidade $I = 12$ W/m^2 que é completamente absorvida.



(a) (1,0 ponto) Determine o número de fótons que atinge a placa por segundo.

(b) (0,5 ponto) Sabendo que a placa irradia como um corpo negro e que sua temperatura é homogênea e não varia com o tempo, determine a temperatura da placa (Obs: a placa irradia uniformemente e igualmente pelos lados esquerdo e direito; despreze a irradiação pela área lateral.).

(c) (1,0 ponto) Sabendo-se que a placa encontra-se em repouso, na origem do sistema de coordenadas em $t = 0$, determine a posição da placa $x(t)$ em função do tempo.

Solução da questão 2

(a) Uma energia total $E = 12$ J atinge a placa a cada segundo. A energia E_γ de cada fóton é dada por

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,6 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{6,6 \times 10^{-7}} = 3 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Logo, o <u>número total de fótons que atingem a placa por segundo</u> é

$$N = \frac{E}{E_\gamma} = \frac{12}{3 \times 10^{-19}} = \boxed{4 \times 10^{19} \text{ fótons/s}}.$$

(b) Para que a placa permaneça com temperatura constante é necessário que a potência irradiada pela placa seja igual à potência absorvida. A potência absorvida pelo lado esquerdo da placa é igual a 12 W e como a placa irradia uniformemente por ambos os lados, a intensidade irradiada é $I = 6$ W/m^2. A <u>temperatura da placa</u> é dada pela lei de Stefan-Boltzmann

$$I = \sigma T^4 \Longrightarrow T = \left(\frac{I}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{6}{6 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = \boxed{100 \text{ K}}.$$

(c) A pressão de radiação é dada por

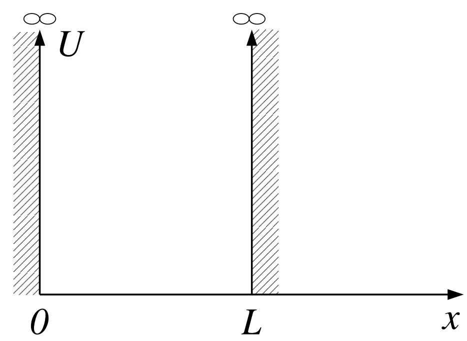
$$P_{rad} = \frac{I}{c} = \frac{12}{3 \times 10^8} = 4 \times 10^{-8} \text{ Pa}.$$

A força que atua sobre a placa é $F = P_{rad} L^2 = 4 \times 10^{-8}$ N. Portanto, a equação horária é

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right) t^2 = 2 \times 10^{-8} t^2}.$$

Questão 3

Uma partícula de massa m que se encontra na região $0 < x < L$ está sujeita a um potencial que corresponde a uma caixa unidimensional de largura L, conforme a figura.



A partícula encontra-se num estado com energia bem definida que corresponde à seguinte auto-função:

$$\Psi(x,t) = A \,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) e^{-ibt/\hbar},$$

onde A e b são constantes positivas.

(a) (1,0 ponto) Calcule a constante b. Qual é o significado físico de b? Justifique.

(b) (0,5 ponto) Calcule a constante A.

(c) (1,0 ponto) Numa medida da posição, qual é a probabilidade de encontrar a partícula na região $0 < x < L/3$?

Solução da questão 3

(a) A constante b é obtida substituindo-se Ψ na equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 A\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)e^{-ibt/\hbar} = -\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2\Psi(x,t)$$

$$\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{ib}{\hbar}A\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)e^{-ibt/\hbar} = -\frac{ib}{\hbar}\Psi(x,t)$$

$$\Longrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2\Psi(x,t) = b\Psi(x,t) \Longrightarrow \boxed{b = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$$

Num auto-estado de energia E a função de onda tem a forma $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$. Comparando com função de onda do problema concluimos que <u>b é a energia da partícula</u>.

(b) A constante A é determinada através da normalização da função de onda.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi^2(x,t)|dx = 1 \Longrightarrow A^2\int_0^L \mathrm{sen}^2\left(\frac{3\pi x}{L}\right)dx = 1 \Longrightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}}.$$

(c) A probabilidade de encontrar a partícula na região $0 < x < L/3$ é

$$P = \int_0^{L/3}|\Psi^2(x,t)|dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/3}\mathrm{sen}^2(3\pi x/L)dx = \frac{2}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,(6\pi x/L)}{12\pi/L}\right]_0^{L/3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Questão 4

(I) (1,0 ponto) Um elétron de massa de repouso m_0 possui energia cinética igual a sua energia de repouso. Determine a energia de um fóton para que ele possua momento igual ao momento do elétron.

(II) Um átomo de hidrogênio possui um elétron na camada $n = 2$.

(a) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda do fóton emitido quando este elétron faz uma transição da camada $n = 2$ para a camada $n = 1$.

(c) (1,0 ponto) Determine a energia de um fóton incidente para que o elétron da camada $n = 2$ chegue ao infinito com velocidade v. Considere que o elétron tenha massa m_0 e despreze efeitos relativísticos.

Solução da questão 4

(I) A energia total do elétron é $E = m_0c^2 + E_{cin} = 2m_0c^2$ e seu momento linear p satisfaz a relação

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \Longrightarrow p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2} \Longrightarrow p = m_0c\sqrt{3}.$$

Portanto, a energia do fóton E_f para que este possua o mesmo momento linear do elétron é

$$\boxed{E_f = pc = m_0c^2\sqrt{3}}.$$

(II) Átomo de hidrogênio com elétron na camada $n = 2$

(a) A energia do fóton emitido pelo elétron na transição entre os níveis $n = 2$ e $n = 1$ é

$$E = \frac{hc}{\lambda} = -hcR_H\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right] = \frac{3hcR_H}{4} \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{4}{3R_H}}.$$

(b) A energia necessária para que o elétron chegue ao infinito com velocidade v é

$$\boxed{E = hcR_H\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}m_0v^2}.$$

Formulário

$1\ \text{nm} = 10^{-9}\ \text{m}, \quad h = 6,6 \times 10^{-34}\ \text{J.s}, \quad c = 3 \times 10^{8}\ \text{m/s},$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma = 6 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}, \qquad \begin{cases} x' = \gamma\left(x - ut\right), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1) m_0 c^2, \quad E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t},$$

$$P_{rad} = \langle S \rangle / c, \quad E_n = -hcR_H \frac{1}{n^2}, \quad \int \text{sen}^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,(2ax)}{4a}.$$