Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2017

PS – 14 de dezembro de 2017

Questão 1

Uma espaçonave de comprimento próprio L_0 move-se com velocidade $0{,}5\,c$ em relação à Terra. Um meteorito, que também se move com velocidade $0{,}5\,c$ em relação à Terra, mas na direção contrária, cruza a espaçonave.

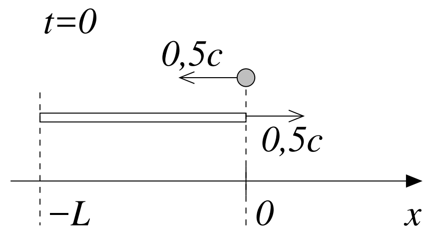
(a) (1,0 ponto) Do ponto de vista de um observador da Terra quanto tempo o meteorito leva para cruzar toda e extensão da nave?

(b) (1,0 ponto) Quanto tempo o meteorito leva para cruzar a espaçonave do ponto de vista de um observador na espaçonave?

(c) (0,5 ponto) Calcule o comprimento da espaçonave no referencial do meteorito.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) O observador da Terra vê a passagem do meteorito conforme a figura abaixo,



onde o comprimento L da nave é

$$L = L_0\sqrt{1 - 0,5^2} = \sqrt{0,75}\, L_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, L_0.$$

A equação horária do meteorito é $x = -0,5ct$ e a da popa da espaçonave é $x = -L + 0,5ct$. Igualando estas duas equações obtemos o tempo que o meteoro leva para cruzar a espaçonave.

$$-L + 0,5ct = -0,5ct \Longrightarrow \boxed{t = \frac{L}{c} = \frac{\sqrt{3}L_0}{2c}}.$$

(b) Um observador na espaçonave vê o meteorito se aproximar com velocidade

$$v' = \frac{-0,5c - 0,5c}{1 - (-0,5c)(0,5c)/c^2} = \frac{-c}{1,25} = -\frac{4}{5}\, c,$$

onde colocamos o referencial S' na espaçonave e usamos a fórmula de transformação de velocidades para calcular a velocidade do meteoro no referencial S'. Para o observador na espaçonave, o meteoro atravessa a espaçonave no tempo

$$t' = \frac{L_0}{|v'|} = \boxed{\frac{5L_0}{4c}}$$

(c) No referencial do meteorito a espaçonave se aproxima com velocidade igual em módulo àquela com que o observador na espaçonave vê o meteorito se aproximar e que já foi calculada no item (b). Assim, no referencial do meteorito o comprimento da nave é

$$L = L_0\sqrt{1 - v'^2/c^2} = L_0\sqrt{1 - 0,8^2} = \boxed{0,6L_0}.$$

Questão 2

(I) (1,0 ponto) Radiação eletromagnética incide sobre a superfície de um metal com função de trabalho ϕ. Calcule a razão entre a frequência da radiação incidente f e a frequência de corte f_c, tal que a energia cinética máxima dos elétrons seja igual a 5 vezes sua função de trabalho.

(II) (1,5 ponto) Considere um espalhamento no qual um fóton de energia E colide com um elétron em repouso. Calcule a energia cinética máxima que o elétron pode adquirir após a colisão em função apenas da energia E e da massa de repouso m_0 do elétron.

Solução da questão 2

(I) Efeito Fotoelétrico

A frequência de corte é

$$hf_c = \phi.$$

A energia cinética máxima é

$$K_{máx} = hf - \phi.$$

Substituindo $K_{máx} = 5\phi$ e ϕ por hf_c na equação acima obtemos

$$5hf_c = hf - hf_c \Longrightarrow \boxed{\frac{f}{f_c} = 6}.$$

(II) Espalhamento Compton

A conservação de energia fornece

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E_e \Longrightarrow K_e = E_e - m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$

A energia cinética do elétron K_e será máxima quando a energia do fóton espalhado for mínima, ou seja quando seu comprimento de onda for máximo. A fórmula de deslocamento de Compton

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta),$$

mostra que λ' é máximo para $\theta = \pi$. Neste caso

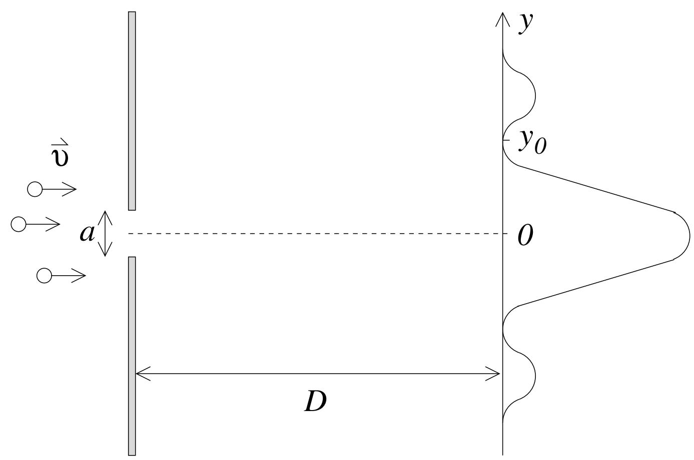
$$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_0c}.$$

Usando a expressão para K e substituindo hc/λ por E obtemos

$$K_e = E - \frac{hc}{\lambda'} = E - \frac{hc}{\lambda + \frac{2h}{m_0c}} = E - \frac{E}{1 + \frac{2E}{m_0c^2}} = \boxed{\frac{E^2}{\frac{m_0c^2}{2} + E}}.$$

Questão 3

Um feixe de elétrons não-relativísticos, todos com a mesma velocidade horizontal $\vec{v} = v\,\hat{\imath}$, incide sobre uma fenda de largura a, e forma um padrão de interferência num anteparo fluorescente situado a uma distância D da fenda, conforme a figura. Considere a massa do elétron igual a m.

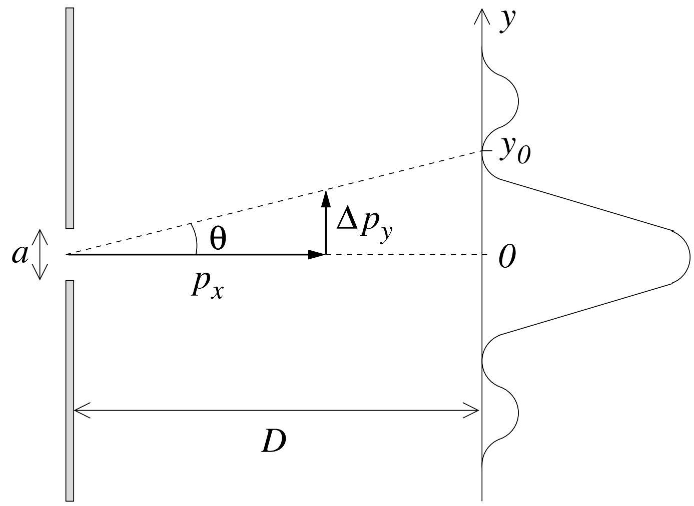


(a) (1,0 ponto) Calcule a ordenada y_0 do primeiro mínimo de difração em função de a, v, D e m e da constante de Planck h para $D >> a >> \lambda$. Lembre que para pequenos ângulos $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta$.

(b) (1,0 ponto) Calcule a componente vertical Δp_y do momento dos elétrons que chegam muito próximo do primeiro mínimo de difração.

(c) (0,5 ponto) Mostre que o valor calculado para Δp_y no item (b) é consistente com o princípio de incerteza de Heisenberg.

Solução da questão 3



(a) O primeiro mínimo de difração ocorre para $\operatorname{sen}\theta = \lambda/a$, onde λ é o comprimento de onda de de Broglie.

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Como o ângulo θ é pequeno podemos escrever

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{amv} \approx \tan\theta = \frac{y_0}{D} \Longrightarrow \boxed{y_0 \approx \frac{hD}{amv}}.$$

(b) Após sofrer difração o momento do elétron adquire uma pequena componente Δp_y. A componente $p_x \approx mv$ e portanto

$$\frac{\Delta p_y}{p_x} \approx \frac{\Delta p_y}{mv} = \frac{y_0}{D} \Longrightarrow \boxed{\Delta p_y \approx \frac{mvy_0}{D} \approx \frac{h}{a}}.$$

(c) O princípio de incerteza de Heisenberg diz que

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}.$$

Colocando $\Delta y \approx a$ (estimativa da incerteza na componente y da posição do elétron) podemos reescrever a expressão do item (b) como $\Delta y \Delta p_y \approx h > h/(4\pi)$. Assim, o resultado do item (b) é consistente com o princípio de incerteza.

Questão 4

A função de onda do estado fundamental de um átomo hidrogenóide é

$$\psi(r, \theta, \phi) = Be^{-Zr/a_0},$$

onde a_0 é o raio de Bohr, B é a constante de normalização e Z é o número de prótons do átomo (por exemplo, $Z = 1$ para o átomo de hidrogênio). Para esse estado do átomo hidrogenóide, calcule

(a) (1,0 ponto) o valor mais provável para a coordenada r,

(b) (1,0 ponto) o valor médio da coordenada radial r,

(c) (0,5 ponto) e determine o módulo do momento angular orbital do elétron.

Solução da questão 4

(a) A probabilidade de encontrar o elétron entre r e $r + dr$ é $P(r)dr$ onde

$$P(r) = |Be^{-Zr/a_0}|^2 4\pi r^2 \equiv Ce^{-2Zr/a_0} r^2$$

e a constante $C = B^2 4\pi$. O valor mais provável de r maximiza $P(r)$.

$$\left.\frac{dP(r)}{dr}\right|_{r=r_{máx}} = 0 \Longrightarrow \frac{2Cr_{máx}}{a_0} e^{-2Zr/a_0}(a_0 - Zr_{máx}) = 0 \Longrightarrow \boxed{r_{máx} = \frac{a_0}{Z}}.$$

(b) A constante de normalização é calculada impondo-se

$$\int |\psi|^2 dV = 1 \Longrightarrow B^2 \int_0^\infty e^{-2Zr/a_0} 4\pi r^2 dr = 1 \Longrightarrow B^2 = \left(\int_0^\infty e^{-2Zr/a_0} 4\pi r^2 dr \right)^{-1}.$$

$$\Longrightarrow \langle r \rangle = B^2 \int_0^\infty r e^{-2Zr/a_0} 4\pi r^2 dr = \frac{\int_0^\infty r e^{-2Zr/a_0} 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty e^{-2Zr/a_0} 4\pi r^2 dr} = \frac{\int_0^\infty r^3 e^{-2Zr/a_0} dr}{\int_0^\infty r^2 e^{-2Zr/a_0} dr}.$$

Fazendo a mudança de variável

$$x = \frac{2Zr}{a_0} \Longrightarrow dx = \frac{2Zdr}{a_0}, \quad r^2 = \left(\frac{2Zr}{a_0}\right)^2 x^2, \quad r^3 = \left(\frac{2Zr}{a_0}\right)^3 x^3,$$

obtemos

$$\langle r \rangle = \left(\frac{2Zr}{a_0}\right) \frac{\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx}{\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx} = \left(\frac{2Zr}{a_0}\right) \frac{(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}|_0^\infty}{(-x^2 - 2x - 2)e^{-x}\ |_0^\infty} = \boxed{\frac{3a_0}{2Z}}.$$

(c) A função de onda independe de θ e ϕ, portanto $\ell = 0$ e $\boxed{L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = 0}$.

Formulário

$$I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2, \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta, \qquad \begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1) m_0 c^2, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda,$$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>,

$$\lambda = h/p, \quad \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$\int x^3 e^{-x} dx = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}, \quad \int x^2 e^{-x} dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$