Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2018

GABARITO DA P2

11 de outubro de 2018

Questão 1

Uma partícula 1, com massa de repouso nula e energia total E_1, move-se ao longo do eixo x e colide com outra partícula 2, com massa de repouso m e inicialmente em repouso. Após o choque, a partícula 1 inverte seu sentido de movimento e adquire energia total E, enquanto a partícula 2 é espalhada formando um ângulo α com o eixo x.

(a) (1,0 ponto) Encontre o ângulo de espalhamento α.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor momento linear $\vec{P}$ e a energia total da partícula 2 após a colisão. Expresse suas respostas apenas em função de E_1, E, m e c.

(c) (0,5 ponto) Determine a expressão para $\frac{1}{E} - \frac{1}{E_1}$ apenas em função de m e c.

Solução da questão 1

- Conservação de energia antes e depois da colisão:

$$E_1 + mc^2 = E + E_2.$$

- Conservação da componente x do vetor momento linear antes e depois da colisão:

$$\frac{E_1}{c} = -\frac{E}{c} + P\cos\alpha.$$

- Conservação da componente y do vetor momento linear antes e depois da colisão:

$$0 = 0 + P\sin\alpha.$$

(a) Tendo em vista que antes da colisão o vetor momento linear possui apenas componente x, após a colisão sua componente y também será nula e portanto $\sin\alpha = 0$, de forma que $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$. Como a componente horizontal do momento linear da partícula 2 aponta no sentido de x positivo, seque que $\boxed{\alpha = 0}$.

(b) A partir da expressão para a componente x do momento linear, obtemos que $P = \frac{1}{c}(E_1 + E)$. Portanto, $\boxed{\vec{P} = \frac{1}{c}(E_1 + E)\vec{i}}$. A energia da partícula 2 após a colisão é dada por $\boxed{E_2 = E_1 - E + mc^2}$.

(c) A partir da relação entre energia e momento relativístico $E^2 = (Pc)^2 + (mc^2)^2$ temos que a energia total de 2 após a colisão pode ser reescrita como $(E_1 - E + mc^2)^2 = \frac{1}{c^2}(E_1 + E)^2 c^2 + (mc^2)^2$, resultando na seguinte expressão $2mc^2(E_1 - E) = 4E_1 E$ e portanto $\boxed{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_1} = \frac{2}{mc^2}}$.

Questão 2

Parte I:

Numa célula fotoelétrica, luz de comprimento de onda λ e intensidade I incide normalmente sobre o catodo de área A e função trabalho ϕ.

(a) (0,5 ponto) Qual é a máxima velocidade dos elétrons de massa m removidos do material? Despreze efeitos relativísticos.

(b) (0,5 ponto) Calcule o número N de fótons por segundo que incidem no catodo.

(c) (0,5 ponto) Sabendo que apenas 5% dos fótons incidentes são absorvidos pelos elétrons (com carga q_e), determine a corrente fotoelétrica.

Parte II:

(d) (1,0 ponto) Um fóton com comprimento de onda $\lambda_0 = \dfrac{h}{mc}$ (m sendo a massa de repouso do elétron e c a velocidade da luz) incide sobre um elétron em repouso. O fóton é espalhado em uma direção perpendicular à direção de incidência. Calcule a energia cinética desse elétron, em termos de m e de c.

Solução da questão 2

Parte I:

(a) A energia cinética máxima dos elétrons devido `incidência de luz é dada por $\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \phi$, de onde obtemos $\boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}(\frac{hc}{\lambda} - \phi)}}$.

(b) Sendo a intensidade I a potência média por unidade de área, temos que ela se relaciona com a energia do fóton e com N por meio da expressão $I = \frac{hc}{\lambda}\frac{N}{A}$, de forma que $\boxed{N = \frac{IA\lambda}{hc}}$.

(c) A corrente elétrica média é definida por $i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, sendo $\Delta Q = q_e n_e$ a carga total associada aos fotoelétrons. Ela se relaciona com o número de fótons N por meio da relação $\frac{n_e}{\Delta t} = \frac{5}{100}N$. Utilizando a expressão do item anterior, obtemos que $\boxed{i = \frac{q_e IA\lambda}{20hc}}$.

Parte II:

(d) Como o espalhamento se dá em um ângulo $\theta = 90°$, que os comprimentos de onda λ' e λ estão relacionados através de

$$\lambda' = \lambda_0 + \lambda_0 (1 - \cos\theta) = 2\lambda_0.$$

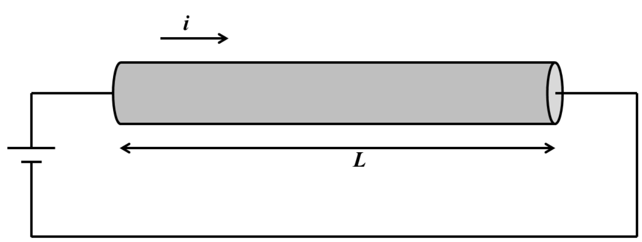
A energia cinética do elétron, K, pode ser calculada pela diferença entre a energia do fóton incidente e a energia do fóton espalhado,

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{2\lambda_0}\right) = \frac{hc}{2\lambda_0} \Longrightarrow \boxed{K = \frac{hc}{2\frac{h}{mc}} = \frac{1}{2}mc^2}.$$

Questão 3

(I) (1,5 ponto) Um observador em repouso na plataforma de uma estação quer medir a velocidade com que um trem se afasta da mesma. Para isto ele emite uma onda eletromagnética de frequência f_0. Um viajante de dentro do trem recebe o sinal eletromagnético e retransmite-o de volta ao observador na plataforma. Este por sua vez mede a frequência da onda chegando do trem e constata que seu valor é f. Obtenha a velocidade do trem em função de f, f_0 e c.

(II) (1,0 ponto) Um resistor cilíndrico com raio a e comprimento L transporta uma corrente i (figura abaixo) e tem potência dissipada dada por $P = Ri^2$. O resistor irradia como um corpo negro, emitindo radiação eletromagnética apenas pela sua superfície lateral. Encontre a expressão para a temperatura na superfície lateral do resistor.



Solução da questão 3

(a) O passageiro do trem se afasta da plataforma com velocidade v e devido ao efeito Doppler ele detectará a radiação com uma frequência menor $\bar{f} < f_0$ dada por $\bar{f} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f_0$. A frequência f retransmitida pelo trem também será detectada pelo observador da plataforma e será menor que $\bar{f}$, dada por $f = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \bar{f}$. Combinando as duas expressões obtemos $f = \frac{c-v}{c+v} f_0$ e portanto $\boxed{v = (\frac{f_0 - f}{f_0 + f})c}$.

(b) A potência dissipada pelo resistor é dada por $P = RI^2$. Tendo em vista que ele atue como um corpo negro, sua potência irradiada é dada por $P = \sigma T^4 A_{irr}$, sendo $A_{irr} = 2\pi a L$, já que ele emite radiação apenas na superfície lateral. A conservação de energia implica que $RI^2 = (\sigma T^4) 2\pi a L$, de onde obtemos que $\boxed{T = (\frac{RI^2}{2\pi a L \sigma})^{1/4}}$.

Questão 4

O múon é uma partícula elementar com a mesma carga do elétron e, mas com massa M 200 vezes maior. No modelo de Bohr para átomos hidrogenóides, o múon executa um movimento circular uniforme em uma órbita estável de raio r tal que o módulo do momento angular L obedece a regra de quantização $L = n\hbar$. As demais grandezas seguem das relações da mecânica clássica. Despreze os efeitos relativísticos. De posse dessa informação determine para cada órbita:

(a) (1,0 ponto) a velocidade do múon.

(b) (1,0 ponto) o raio da órbita e a energia total do múon.

(c) (0,5 ponto) Suponha que o múon faça uma transição do nível $n = 4$ para $n = 1$ com emissão de um fóton. Calcule a diferença de momento angular do múon.

As respostas devem ser dadas apenas em termos do número quântico n e das constantes fundamentais e, massa do elétron m, ϵ_0 e $\hbar$.

Solução da questão 4

(a) Aplicando a segunda lei de Newton $F = Ma$ ao múon

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = M\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = Mv^2 r}_{(*)} = (Mvr)v = Lv = n\hbar v.$$

Logo,

$$\boxed{v = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{n}}$$

(b) Usando (*)

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = Mv^2 r = \frac{(Mvr)^2}{Mr} = \frac{L^2}{Mr} = \frac{n^2\hbar^2}{Mr}.$$

Logo,

$$\boxed{r = \frac{\hbar^2}{200m(e^2/4\pi\epsilon_0)}n^2}.$$

Usando (*) e o resultado do item (a)

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2}Mv^2 = \boxed{-\frac{100m}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2}}$$

(c) De acordo com o modelo atômico de Bohr, o momento angular do múon antes e depois da transição é dado por $L = 4\hbar$ e $1\hbar$, respectivamente. Logo, a diferença de momento angular é dada por $3\hbar$.

Formulário

Efeito Doppler em termos do comprimento de onda: $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$ ou $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$, $\lambda = c/f$, $E = \gamma m_0 c^2$, $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$, $K = (\gamma - 1) m_0 c^2$,

$\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$, $E = hf = hc/\lambda$, $p = h/\lambda$, $E_n = -hcR_H/n^2$,

$\lambda' = \lambda_0 + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento,

$I(\lambda, T) = \dfrac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\dfrac{hc}{\lambda k T}\right) - 1\right]}$, $I_{total} = \sigma T^4$, $\lambda_{máx} T = 3 \times 10^{-3}$ m $\cdot$ K .