Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2018

GABARITO DA REC

14 de fevereiro de 2019

Questão 1

Luz monocromática de comprimento de onda λ incide sobre duas fendas idênticas, cujos centros estão separados por uma distância d. A luz que passa pelas fendas incide num anteparo situado a uma distância $L >> d$ das fendas.

(a) (1,0 ponto) Se $d = 10\lambda$, e a largura das fendas é desprezível comparada com a separação entre elas, quantas linhas de intensidade zero serão observadas no anteparo entre $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$. Justifique.

(b) (1,0 ponto) Se considerarmos agora que a largura de cada uma das fendas é $a = 2\lambda$, os efeitos de difração em cada uma das fendas podem contribuir para os mínimos de intensidade. No caso de duas fendas, quantas linhas de intensidade zero serão observadas entre $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$?

(c) (0,5 ponto) Admitindo que a intensidade da luz incidente é I, imediatamente antes de passar pelas fendas, qual é a intensidade da luz emergente de cada uma das fendas? Justifique.

Solução da questão 1

(a) Os máximos ocorrem para sen$\theta = m\lambda/d = m/10$. Porém, $-1/2 \leq$ sen$\theta \leq 1/2$. Combinando as duas expressões obtemos $-1/2 \leq m/10 \leq 1/2$. Assim, existem no intervalo 11 regiões iluminadas correspondentes a $m = 0, \pm 1, ... \pm 5$ e portanto 10 linhas de intensidade nula que estão entre os máximos.

Ou, combinando diretamente a condição para haver mínimos, sen$\theta = (n+1/2)\lambda/d = (n+1/2)/10$, com $-1/2 \leq$ sen$\theta \leq 1/2$ obtemos $-11/2 \leq n \leq 9/2$ que também fornece 10 linhas de intensidade nula ($-5 \leq n \leq 4$).

(b) Os mínimos de difração ocorrem para sen$\theta = p\lambda/a = p/2$ com $-1/2 \leq$ sen$\theta \leq 1/2$. Assim, $-1/2 \leq p/2 \leq 1/2$ e teremos dois mínimos de difração para $p = \pm 1$. Como estes mínimos não coincidem com os mínimos encontrados no item (a) teremos dois mínimos a mais. O número total de mínimos será de 10+2=12.

(c) A intensidade I corresponde a uma densidade de energia (energia por unidade de área por segundo). Independentemente de as fendas serem idênticas ou não a intensidade que emerge de cada fenda será igual a I.

Questão 2

(I) Uma nave espacial se afasta da Terra com velocidade $c/2$ em relação à Terra. Em $t = 0$, a nave lança um míssil, que viaja com velocidade $c/2$ em relação à nave, na mesma direção da mesma.

(a) (0,5 ponto) Determine a velocidade do míssil em relação à Terra.

(b) (1,0 ponto) Considerando que a nave espacial viaja em direção à uma localidade situada à uma distância D segundo observadores da Terra, determine o tempo necessário para a nave atingir a localidade segundo seu comandante.

(II) (1,0 ponto) A função trabalho de um metal é ϕ. Calcule o maior comprimento de onda λ_0 da radiação que ao incidir sobre este metal ejeta elétrons da sua superfície. Considere h e c dados.

Solução da questão 1

(I)

(a) A velocidade do míssil em relação à Terra pode ser calculada por meio da expressão $v_x = \dfrac{v_x' + u}{1 + \dfrac{uv_x'}{c^2}}$, sendo v_x' e u a velocidade do míssil em relação à nave e a velocidade da nave em relação à Terra, respectivamente. Desta forma, temos que $v_x = \frac{c/2+c/2}{1+\frac{c}{2}\frac{c}{2}\frac{1}{c^2}} = \frac{4}{5}c$.

(b) O tempo necessário para a nave atingir a localidade segundo um observador da Terra é dado por $\Delta t = \frac{2D}{c}$. Sob o ponto de vista do comandante, o intervalo de tempo $\Delta t'$ é um tempo próprio e relaciona-se com Δt por meio da expressão. $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Assim, $\Delta t' = \frac{\sqrt{3}D}{c}$.

(II) A energia cinética dos elétrons ejetados do metal por radiação de comprimento de onda λ é

$$E_{cin} = \frac{hc}{\lambda} - \phi \ .$$

No caso limite $E_{cin} = 0$, portanto

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \phi \Longrightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{hc}{\phi}} \ .$$

Questão 3

É realizado um experimento onde fótons são espalhados por elétrons livres inicialmente em repouso. Verifica-se que: (1) os fótons emergem em $\theta = 90^\circ$ relativamente à direção de incidência; (2) os elétrons espalhados são completamente freiados por uma diferença de potencial V.

(a) (0,5 ponto) Escreva as expressões para as conservações de energia e de momento linear para o processo. Denomine: λ', o comprimento de onda do fóton espalhado; λ, o comprimento de onda do fóton incidente; ϕ, o ângulo entre o elétron espalhado e a direção de incidência do fóton; $\vec{p}_e$, o vetor momento linear do elétron espalhado; e K_e, a energia cinética do elétron espalhado.

(b) (1,0 ponto) Qual é o comprimento de onda λ dos fótons incidentes? Forneça a sua resposta em função da diferença de potencial V e do comprimento de onda de Compton λ_C.

(c) (1,0 ponto) Qual é o comprimento de onda λ_e dos elétrons espalhados? Forneça sua resposta em função do comprimento de onda λ dos fótons incidentes e do comprimento de onda de Compton λ_C.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) Conservação de energia:

$$\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = K_e \tag{1}$$

Conservação de momento:

$$\text{direção x:} \qquad \frac{h}{\lambda} = p_e \cos\phi, \tag{2}$$

$$\text{direção y:} \qquad \frac{h}{\lambda'} = p_e \,\mathrm{sen}\,\phi. \tag{3}$$

(b) Como a diferença de potencial V freia completamente os elétrons, $K_e = eV$. Substituindo na equação (1) vem

$$\frac{hc}{eV}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 1 \tag{4}$$

A equação para o efeito Compton, $\lambda' = \lambda + \lambda_{\mathrm{C}}(1 - \cos\theta)$, fornece para $\theta = 90°$

$$\lambda^2 + \lambda_{\mathrm{C}}\lambda - \frac{\lambda_{\mathrm{C}} hc}{eV} = 0$$

cuja solução é

$$\lambda = -\frac{\lambda_{\mathrm{C}}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_{\mathrm{C}}^2 + \frac{\lambda_{\mathrm{C}} hc}{eV}}$$

(c) Tem-se (de Broglie) $p_e = h/\lambda_e$. Substituindo em (2) e (3), e considerando que $\cos^2\phi + \mathrm{sen}^2\phi = 1$, resulta

$$\lambda_e = \frac{\lambda + \lambda_{\mathrm{C}}}{\sqrt{1 + (\lambda + \lambda_{\mathrm{C}})^2/\lambda^2}}$$

Questão 4

Considere o movimento unidimensional de uma partícula de massa m sujeita a um potencial $U(x)$ que é nulo na região $0 < x < L$ e infinito para $x \leq 0$ ou $x \geq L$.

(a) (0,5 ponto) Escreva a função de onda $\psi(x)$ nas regiões $x \leq 0$ e $x \geq L$. Justifique sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Escreva a equação de Schrödinger para a região $0 < x < L$ e utilizando as condições de contorno, obtenha a expressão para função de onda normalizada $\psi(x)$.

(c) (1,0 ponto) Determine os possíveis valores dos níveis de energia em termos dos parâmetros do enunciado e de $\hbar$.

Solução da questão 4

(a) Fora da região $0 < x < L$ o potencial é infinito. Então a probabilidade $|\psi(x)|^2 dx$ é nula. Logo, $\boxed{\psi(x) = 0}$.

(b) Na região $0 < x < L$ temos a equação de Schrödinger unidimensional com potencial nulo, dada por

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)}$$

A equação acima tem solução estacionária do tipo $\psi(x) = A\text{sen}(kx) + B\cos(kx)$, o que pode ser verificada substituindo-a na própria equação de Schrödinger de forma que $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(A\text{sen}(kx) + B\cos(kx)) = -k^2(A\text{sen}(kx) + B\cos(kx)) = -k^2\psi(x)$. onde $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Para que a condição de contorno em $\psi(0) = 0$ seja satisfeita, devemos ter $B = 0$. Uma vez que $\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$, obtemos que $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ e portanto $\boxed{\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}(kx)}$.

(c) Em $x = L$, teremos $A\text{sen}(kL) = 0$. Logo $kL = n\pi$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Portanto,

$$k = \frac{n\pi}{L}.$$

Usando a relação entre k e E, teremos

$$\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2};\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots}$$

Formulário

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \qquad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\text{sen}\theta, \qquad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\text{sen}\theta.$$

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1)m_0c^2, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda$$

$E_n = -hcR_H/n^2$, onde $hcR_H = 13.6$ eV, $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>,

$$\lambda = h/p, \quad \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6 \times 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}\ ; \quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}\ ;$$

$$\int x^3 e^{-x} dx = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}, \quad \int x^2 e^{-x} dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$