Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2018

GABARITO DA SUB

06 de dezembro de 2018

Questão 1

Considere uma estrela situada à uma distância D medida por um observador em repouso na Terra. Um astronauta parte da Terra em direção à estrela com velocidade de 0.6c.

(a) (1,0 ponto) Sob o ponto de vista do astronauta, qual é a distância percorrida e o tempo de viagem até a estrela?

(b) (0,5 ponto) Qual é a duração da viagem Terra-estrela medida pelo observador da Terra?

(c) (1,0 ponto) Se na metade da viagem (para o observador na terra) o astronauta emitir um sinal de luz em direção à Terra, quanto tempo depois da partida do astronauta esse sinal será observado pelo observador na Terra?

Solução da questão 1

(a) A distância D é um comprimento próprio de forma que a distância medida pelo astronauta D' será dada por $D' = D\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = D\sqrt{1-(0,6)^2}$ e portanto $\boxed{D' = \frac{4D}{5}}$. O tempo de viagem até a estrela do ponto de vista do astronauta $\Delta t'$ é então $\Delta t' = \frac{D'}{v} = \frac{4D}{3c}$ e portanto $\boxed{\Delta t' = \frac{4D}{3c}}$.

(b) Sob o ponto de vista do observador da Terra a duração é dada por $\Delta t = D/v = \frac{5D}{3c}$. Ela pode ser calculada de uma forma alternativa $\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{5D}{3c}}$.

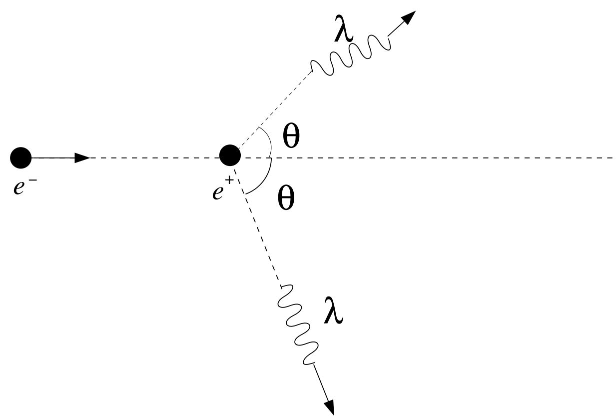
(c) Usando os resultados do item anterior, a astronave atingirá a metade do caminho depois de um intervalo de tempo $\Delta t_{1/2} = \frac{5D}{6c}$ sob o ponto de vista do observador da Terra. Como o sinal viaja com velocidade c, ele chegará ao observador da Terra depois de $\Delta t_{sinal} = \frac{D}{2c}$. Portanto, o intervalo de tempo total é dado por $\boxed{\Delta t_{total} = \Delta t_{1/2} + \Delta t_{sinal} = \frac{4D}{3c}}$.

Questão 2

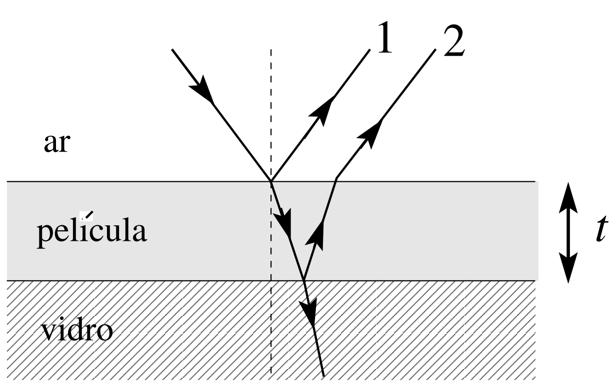
(I) Um elétron, com massa de repouso m_0 e energia cinética K colide com um pósitron em repouso produzindo dois fótons, conforme ilustrado na figura abaixo. O pósitron é uma partícula com a mesma massa de repouso do elétron, porém com carga oposta.

(a) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda dos fótons em função de m_0 e K.

(b) (1,0 ponto) Encontre o ângulo θ de espalhamento.



(II) (1,0 ponto) Uma película muito fina de material transparente, de índice de refração 1,3 é utilizada como revestimento anti-refletor na superfície de um vidro de índice de refração 1,5 de uma célula solar. Qual deve ser a espessura mínima da película para numa incidência perpendicular não se observar por reflexão a luz que no vácuo tem comprimento de onda $\lambda = 520$ nm?



Solução da questão 2

(I)

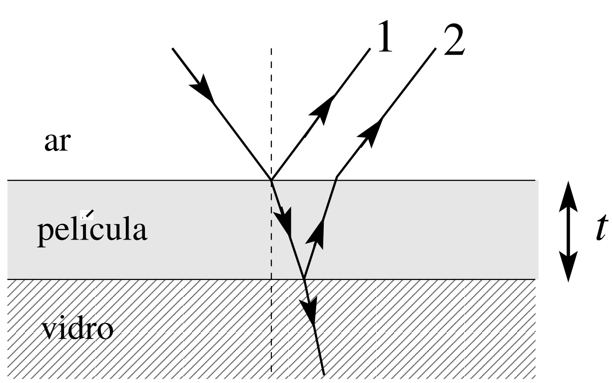
(a) Da conservação de energia antes e depois da colisão temos que

$$2m_0c^2 + K = 2\frac{hc}{\lambda} \qquad \longrightarrow \lambda = \frac{2hc}{2m_0c^2 + K}.$$

(b) A partir da energia cinética podemos obter momento linear por meio da relação $(pc)^2 = K^2 + 2Km_0c^2$, de forma que $p = m_oc\sqrt{\alpha^2 - 1}$, onde $\alpha = \frac{K}{m_0c^2} + 1$. Da conservação da componente x do momento linear temos que:

$$m_oc\sqrt{\alpha^2 - 1} = \frac{2h}{\lambda}\cos\theta \qquad \longrightarrow \theta = cos^{-1}(\frac{m_0c\lambda}{2h}\sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

(II) A figura



mostra que vai haver interferência destrutiva entre os raios 1 e 2 quando

$$2\pi\frac{2t}{\lambda_p} + \pi - \pi = (2m+1)\pi \Longrightarrow t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n_p}; \quad m = 0, 1, 2, ...,$$

onde usamos $\lambda_p = \lambda/n_p$. A espessura mínima é obtida com $m = 0$.

$$t_{mín} = \frac{\lambda}{4n_p} = \frac{520 \times 10^{-9}}{4 \times 1,3} = 10^{-7} \text{ m}.$$

Questão 3

As funções de onda correspondentes aos estados estacionários de uma partícula de massa m que se move em uma dimensão confinada em um poço de potencial infinito de largura L são dadas por:

$$\Psi_n(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-i(E_n/\hbar)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & \text{para} \quad 0 \leq x \leq L \\ 0 \quad \text{para} \quad \text{nas demais regiões} \end{cases}$$

sendo E_n a energia do $n-$ésimo estado.

(a) (0,5 ponto) Determine a expressão para o comprimento de onda de de Broglie desta partícula para o estado correspondente a $n = 5$.

(b) (0,5 ponto) Estime a incerteza mínima na medida do momento linear desta partícula no estado $n = 5$.

(c) (1,0 ponto) Suponha agora que no instante $t = 0$, a partícula encontra-se em um estado dado pela superposição de dois estados estacionários na forma $\Psi(x,0) = A[\psi_3(x) + \psi_4(x)]$, onde $\psi_3(x)$ e $\psi_4(x)$ representam a parte espacial das soluções estacionárias para $n = 3$ e $n = 4$ respectivamente e A uma constante. Obtenha $\Psi(x,t)$ e $|\Psi(x,t)|^2$. Expresse sua resposta em termos de $\psi_3(x)$ e $\psi_4(x)$ e das demais grandezas que caracterizam o sistema.

(d) (0,5 ponto) O estado $\Psi(x,t)$ acima é um estado estacionário? Justifique sua resposta.

Solução da questão 3

(a) O comprimento de onda de de Broglie é dado por $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$, onde $k_5 = \frac{5\pi}{L}$. Portanto $\boxed{\lambda_5 = 2L/5}$.

(b) O princípio da incerteza estabelece que $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$. Estimando $\Delta x = L$, encontramos $\Delta p_x \geq \hbar/2L$. Portanto, a incerteza mínima em Δp_x é dada por $\boxed{\Delta p_x = \hbar/2L}$.

(c) A partir do enunciado temos que a função de onda $\Psi(x,t)$ num dado instante de tempo t é dada por $\Psi(x,t) = A\sqrt{\frac{2}{L}}[e^{-i(E_3/\hbar)t} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + e^{-i(E_4/\hbar)t} \sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right)]$. A densidade de probabilidade $|\Psi(x,t)|^2 = \frac{2}{L}A^2[\sin^2(\frac{3\pi}{L}x) + \sin^2(\frac{4\pi}{L}x) +$
$\sin(\frac{3\pi}{L}x)\sin(\frac{4\pi}{L}x)\left(e^{-i(E_3-E_4)t/\hbar} + e^{i(E_3-E_4)t/\hbar}\right)]$.

(d) Uma vez que $|\Psi(x,t)|^2$ depende explicitamente do tempo, o estado $\Psi(x,t)$ não é um estado estacionário.

Questão 4

(I) Considere o átomo de hidrogênio composto por um elétron que transita do estado $n = 3$ para o estado $n = 2$ emitindo um fóton.

(a) (0,5 ponto) Encontre o comprimento de onda λ do fóton emitido, em nm.

(b) (1,0 ponto) Dado que a transição acima ocorre num intervalo de tempo de $\Delta t = 10^{-9}$s, encontre a incerteza de λ em nm.

(II) (1,0 ponto) Uma estrela de raio R irradia a uma temperatura absoluta T. Tratando a estrela como um corpo negro, determine a fórmula para a massa perdida pela estrela ΔM num intervalo de tempo Δt.

Solução da questão 4

(a) O espectro de energia do átomo de hidrogênio é dado por $E_n = -\frac{hcR_H}{n^2}$. O comprimento de onda do fóton emitido está relacionado com a diferença de energia entre os estados dado por $h\frac{c}{\lambda} = hcR_H[-\frac{1}{9} + \frac{1}{4}]$, de forma que $\boxed{\lambda = \frac{36}{5R_H} = 600\text{nm}}$.

(b) O princípio da incerteza estabelece que $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$, onde de acordo com o enunciado $\Delta t = 10^{-9}$s. Uma vez que $E = \frac{hc}{\lambda}$ a incerteza na energia é dada por $\Delta E \sim \frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda$. Utilizando o valor de λ do item anterior, encontramos $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi c \Delta t}$ e portanto $\boxed{\Delta\lambda = 2.10^{-13}\text{m}}$.

(II) Potência irradiada pela estrela:

$$P = IA = (\sigma T^4)(4\pi R^2) = 4\pi\sigma T^4 R^2,$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Energia irradiada no intervalo Δt:

$$\Delta E = P\Delta t = 4\pi\sigma T^4 R^2 \Delta t.$$

Equivalência entre massa e energia:

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = \boxed{\frac{4\pi\sigma T^4 R^2 \Delta t}{c^2}}.$$

Formulário

$$I = I_0 \left[\frac{\mathrm{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2, \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \mathrm{sen}\,\theta, \qquad \begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma \left(t - \dfrac{ux}{c^2} \right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{u v_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1) m_0 c^2, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda$$

$E_n = -hcR_H/n^2$, onde $hcR_H = 13.6$ eV, $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do fóton,

$$\lambda = h/p, \quad \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6 \times 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}\,; \quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}\,;$$

$$\int x^3 e^{-x} dx = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}, \quad \int x^2 e^{-x} dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$