Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2019

GABARITO DA P2

10 de outubro de 2019

Questão 1

Uma partícula com energia cinética de 200 MeV e massa de repouso m_0=300 MeV/c^2 colide inelasticamente com outra partícula de mesma massa em repouso, resultando em uma única partícula após a colisão.

(a) (1,0 ponto) Encontre a razão entre a velocidade inicial da partícula incidente e a velocidade da luz.

(b) (1,0 ponto) Encontre a razão entre a velocidade da partícula resultante e a velocidade da luz.

(c) (0,5 ponto) Encontre a razão entre massa de repouso da partícula resultante M_0 e m_0.

Solução da questão 1

(a) A energia cinética K de uma partícula relativística é dada pela expressão $K = (\gamma - 1)m_0c^2$, de forma que sua velocidade é dada por

$$v^2 = c^2\Big(1 - \frac{1}{(K/m_0c^2 + 1)^2}\Big)$$

Substituindo os valores K=200MeV e m_0 =300MeV/c^2, encontramos $\boxed{v/c = 4/5}$.

(b) A velocidade v_f e massa de repouso finais M_0 da partícula podem ser obtidas por meio das relações de conservação da energia e momento relativístico:

$$\gamma m_0c^2 + m_0c^2 = \gamma' M_0c^2 \tag{1}$$

e

$$\gamma m_0 v = \gamma' M_0 v_f,$$

onde $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_f^2}{c^2}}}$. Tomando a razão entre as equações acima, obtemos que $v_f = \frac{\gamma}{\gamma+1}v$. Uma vez que $\gamma = 5/3$, encontramos $\boxed{v_f/c = 1/2}$.

(c) Uma vez que $v_f = c/2$, encontramos $\gamma' = 2/\sqrt{3}$. Utilizando a equação (1), temos que $M_0/m_0 = (\gamma+1)/\gamma'$. Obtemos então que $\boxed{M_0/m_0 = 4/\sqrt{3}}$.

Questão 2

Em uma experiência sobre o efeito fotoelétrico, obtiveram curvas de corrente como função da diferença de potencial para dois conjuntos de feixes luminosos e potências $(\lambda_1, P_1) = (600nm, 1.6W)$ e $(\lambda_2, P_2) = (400nm, 3.2W)$. Assuma o valor $h = 4 \times 10^{-15}$eV.s para a constante de Planck.

(a) (0,5 ponto) Qual é a energia dos fótons, em eV, para cada feixe?

(b) (1,0 ponto) Obtenha a função trabalho do metal (em eV) considerando que o potencial de freiamento dos elétrons do feixe (1) é igual a $V_1 = 1.2$ V. Em seguida obtenha o potencial de freiamento V_2 para os elétrons do feixe (2).

(c) (1,0 ponto) Quantos elétrons (por segundo) o feixe de menor potência consegue arrancar do metal, sabendo-se que a probabilidade de um elétron ser arrancado por um fóton desse feixe é 0.01%?

Solução da questão 2

(a) A energia dos fótons provenientes de cada feixe é dada por $E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$ e $E_2 = \frac{hc}{\lambda_2}$, respectivamente de onde obtemos $\boxed{E_1 = 2\text{eV e } E_2 = 3\text{eV}}$.

(b) Dada a relação para o efeito fotoelétrico $eV_1 = E_1 - \phi$, sendo V_1 e ϕ as tensões de freiamento e função trabalho, respectivamente. Tendo em vista que $V_1 = 1.2$V e $E_1 = 2$eV, encontramos $\boxed{\phi = 0.8\text{eV}}$. A tensão de freiamento para o segundo feixe é obtida da relação $eV_2 = E_2 - \phi = 2.2$eV e portanto $\boxed{V_2 = 2.2\text{V}}$.

(c) A energia total do feixe num intervalo de tempo Δt é $U = P\Delta t$. Como a energia de cada fóton é dada $E = hc/\lambda$ e considerando que apenas uma fração P_e dos elétrons são arrancados da superfície metálica, o número de elétrons por segundo é dado por

$$\frac{N_e}{\Delta t} = \frac{P}{E}P_e = \frac{P\lambda}{hc}P_e.$$

Substituindo os valores para o feixe de (menor) potência P_1 e energia E_1, tendo em vista que a probabilidade do elétron ser arrancado é 10^{-4} encontramos $\boxed{N_e/\Delta t = 5.10^{14}\text{elétrons/s}}$.

Questão 3

Parte I:

Considere o modelo de Bohr para um íon monoeletrônico com número atômico Z. Neste caso, um elétron de massa m e carga $-e$ move-se numa órbita circular de raio r em torno de um núcleo fixo de carga $+Ze$.

(a) (0,5 ponto) Partindo da segunda lei de Newton determine o módulo da velocidade do elétron v em função do raio da órbita r.

(b) (1,0 ponto) Utilizando a quantização do momento angular, deduza a energia do íon num estado estacionário caracterizado pelo número quântico n.

As respostas devem ser dadas apenas em termos do número quântico n, do número atômico Z e das constantes fundamentais e, massa do elétron m, ϵ_0 e $\hbar$.

Parte II

(1,0 ponto) Um fóton com comprimento de onda $\lambda_0 = \dfrac{h}{mc}$ (m sendo a massa de repouso do elétron e c a velocidade da luz) incide sobre um elétron em repouso. O fóton é espalhado em uma direção oposta à direção de incidência. Calcule a energia cinética desse elétron, em termos de m e de c.

Solução da questão 3

Parte I:

(a) Da segunda lei de Newton e da lei de Coulomb, temos que

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Logo,

$$v = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{mr}\right)^{1/2}.$$

(b) A condição para órbitas estacionárias é $mvr = n\hbar$, de forma que $r = n\hbar/mv$. Assim

$$r = n\hbar\left[\frac{r}{m(Ze^2/4\pi\epsilon_0)}\right]^{1/2}. \quad \text{Assim,} \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mZe^2}n^2.$$

Uma vez que energia do elétron numa órbita de raio r é

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Portanto os níveis de energia são dadas por

$$E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_n} = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2}.$$

(II) Como o espalhamento se dá em um ângulo $\theta = 180°$, os comprimentos de onda λ' e λ estão relacionados por meio da expressão

$$\lambda' = \lambda_0 + \lambda_0\,(1 - \cos\theta) = 3\lambda_0.$$

A energia cinética do elétron K pode ser calculada pela diferença entre a energia do fóton incidente e a energia do fóton espalhado,

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{3\lambda_0}\right) = \frac{2hc}{3\lambda_0} \Longrightarrow \boxed{K = \frac{2hc}{3\frac{h}{mc}} = \frac{2}{3}mc^2}.$$

Questão 4

Uma estrela esférica de raio R e com temperatura T emite radiação térmica como um corpo negro.

(a) (1,0 ponto) Calcule a quantidade de massa Δm perdida pela estrela durante um intervalo de tempo Δt (expresse sua resposta em termos da constante de Stefan-Boltzmann, de c, T, R e Δt).

(b) (1,5 ponto) Um laboratório na Terra observa que o comprimento de onda do máximo da distribuição de radiação térmica da estrela é λ_{max}^{Terra}. Supondo que a estrela esteja se afastando da Terra com velocidade v, calcule sua temperatura, como função de $v, c, \lambda_{max}^{Terra}$ e da constante de Wien b.

Solução da questão 4

(a) A energia térmica irradiada pela estrela num intervalo de tempo Δt é dada por $U = \sigma T^4 (4\pi R^2)\Delta t$ Portanto, sua quantidade de massa perdida num intervalo Δt vale $\boxed{\Delta m = \frac{U}{c^2} = \frac{4\pi R^2 T^4 \sigma \Delta t}{c^2}}$.

(b) O comprimento de onda do máximo da distribuição térmica da estrela, satisfaz a lei de deslocamento de Wien

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}; \quad b \approx 3 \times 10^{-3}\ m \cdot K$$

Portanto, a frequência correspondente é

$$f_{max} = \frac{cT}{b}.$$

Devido ao efeito Doppler (estrela se afastando), a frequência observada na Terra será

$$f_{max}^{Terra} = f_{max}\left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)^{1/2} = \frac{cT}{b}\left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)^{1/2}.$$

Portanto, a temperatura da estrela é

$$T = \frac{b}{c} f_{max}^{Terra}\left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{1/2} = \frac{b}{\lambda_{max}^{Terra}}\left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{1/2}.$$

Formulário

Efeito Doppler em termos do comprimento de onda: $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$ ou $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$, $\lambda = c/f$, $E = \gamma m_0 c^2$, $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$, $K = (\gamma - 1) m_0 c^2$,

$\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$, $E = hf = hc/\lambda$, $p = h/\lambda$, $E_n = -hcR_H/n^2$, 1eV=1.6.10^{-19}J;

$\lambda' = \lambda_0 + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento,

$I(\lambda, T) = \dfrac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\dfrac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]}$, $I_{total} = \sigma T^4$, $\lambda_{máx} T = 3 \times 10^{-3}$ m $\cdot$ K .