Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2022

GABARITO DA P2

1 de dezembro de 2022

Questão 1

Luz com comprimento de onda 200×10^{-9} m e intensidade I incide sobre uma superfície de alumínio. Sabe-se que no alumínio são necessários 4,2 eV para remover um elétron. Responda:

(a) (1,0 ponto) Qual a energia cinética máxima dos fotoelétrons emitidos? Expresse sua resposta em eV.

(b) (0,5 ponto) Qual o maior potencial de frenagem V_0 (em Volts) que podemos aplicar e ainda detetar uma corrente de fotoelétrons?

(c) (0,5 ponto) Qual é o comprimento de onda λ_c de corte dos fótons incidentes para que ocorra o efeito fotoelétrico?

(d) (0,5 ponto) Se a intensidade da luz incidente for quadruplicada, o que ocorre com a energia dos fotoelétrons? Justifique sua resposta.

Solução da questão 1

(a) $K_{máx} = hf - \phi = \dfrac{hc}{\lambda} - \phi = \dfrac{(4,2 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}) \cdot (3 \times 10^{8} \text{ m/s})}{200 \times 10^{-9} \text{ m}} - 4,2 \text{ eV} \Rightarrow$ $\boxed{K_{máx} = 2,1 \text{ eV}}$

(b) $K_{máx} = eV_0 \Rightarrow V_0 = \dfrac{K_{máx}}{e} = \dfrac{2,1 \text{ eV}}{\text{e}} \Rightarrow \boxed{V_0 = 2,1 \text{ V}}$

(c) $\dfrac{hc}{\lambda_c} = \phi \Rightarrow \lambda_c = \dfrac{hc}{\phi} = \dfrac{(4,2 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}) \cdot (3 \times 10^{8} \text{ m/s})}{4,2 \text{ eV}} \Rightarrow \boxed{\lambda_c = 3 \times 10^{-7} \text{ m}}$

(d) A energia dos fotoelétrons emitidos não é alterada, uma vez que aumentar a intensidade só causa um aumento do número de fótons incidentes.

Questão 2

Uma partícula não-relativística de massa M e energia E que se move em uma dimensão, encontra-se em um poço de potencial de altura infinita e largura L. Assim, a energia potencial da partícula pode ser expressa como:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ 0 & 0 < x < L \\ \infty & x \geq L \end{cases}$$

(a) (1,0 ponto) <u>Deduza a expressão</u> para os níveis de energia dos estados estacionários possíveis para essa partícula;

(b) (0,5 ponto) Qual a frequência associada ao fóton emitido por esse sistema quando a partícula passa do segundo estado excitado ($n = 3$) para o estado fundamental ($n = 1$)?

(c) (0,5 ponto) Considere a componente espacial da função de onda da partícula no estado fundamental, dada por $\psi_1(x) = A\,\mathrm{sen}(\pi x/L)$, onde A é uma constante. Escreva a expressão, <u>somente</u> <u>em termos de L</u>, para a probabilidade de encontrar a partícula numa posição entre $x = 0$ e $x = L/3$. Não é necessário resolver as integrais.

(d) (0,5 ponto) Considere a partícula em um estado dado pela superposição de dois estados estacionários do sistema: $\Psi(x,t) = a\left(\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}\right) + b\left(\psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar}\right)$, onde a e b são constantes que normalizam $\Psi(x,t)$. Este estado é um estado estacionário? Justifique sua resposta.

Solução da questão 2

(a) A equação de Schrödinger para este potencial pode ser escrita como:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2ME}{\hbar^2}\psi(x) \Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x),$$

onde $k = \sqrt{\dfrac{2ME}{\hbar^2}}$.

A solução geral da equação de Schrödinger é:

$$\psi(x) = A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)$$

e as condições de contorno para este problema são $\psi(0) = 0$ e $\psi(L) = 0$. Aplicando essas duas condições de contorno, temos:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow A\,\mathrm{sen}(kL) = 0 \Rightarrow kL = \pi n \Rightarrow \sqrt{\frac{2ME}{\hbar^2}}L = \pi n \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{h^2}{8ML^2}n^2}$$

(b) $$hf = E_3 - E_1 = \left(\frac{h^2}{8ML^2}\right)\cdot(9-1) = \frac{h^2}{ML^2} \Rightarrow \boxed{f = \frac{h}{ML^2}}$$

(c) $$P = \frac{\int_0^{L/3}\psi^*(x)\psi(x)\,dx}{\int_0^{L}\psi^*(x)\psi(x)\,dx} \Rightarrow \boxed{P = \frac{\int_0^{L/3}\mathrm{sen}^2(\pi x/L)\,dx}{\int_0^{L}\mathrm{sen}^2(\pi x/L)\,dx}}$$

(d) Não, pois nesse caso a densidade de probabilidade $|\Psi(x,t)|^2$ depende do tempo.

Questão 3

Um elétron com energia cinética $E_{cin} = 36$ eV colide com um átomo de hidrogênio que se encontra no estado fundamental de energia. Apenas uma parte da energia do elétron incidente é transferida para o átomo, que passa para um estado excitado com número quântico n. Depois de um certo tempo, após a colisão, o átomo emite um fóton com energia igual a 10,2 eV e retorna ao estado fundamental. O tempo de transição do estado excitado para o estado fundamental é igual a Δt. (Dados: massa do elétron: $m_e = 0,5$ MeV/c^2, onde $c = 3 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz)

(a) (1,0 ponto) Qual é o comprimento de onda λ de de Broglie do elétron incidente?

(b) (1,0 ponto) Determine o nível n do estado excitado do hidrogênio.

(c) (0,5 ponto) Calcule a incerteza na energia do fóton emitido sabendo que $\Delta t = 10^{-8}$ s.

Solução da questão 3

(a) O comprimento de onda de de Broglie é calculado através de:

$\lambda = \dfrac{h}{p}$, sendo que o momento linear p do elétron pode ser calculado através da expressão

$E_{cin} = \dfrac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE_{cin}}$

Combinando as duas equações acima, temos:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{cin}}} = \frac{4,2 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}}{\sqrt{\dfrac{2(0,5 \times 10^6\ \text{eV}) \cdot (36\ \text{eV})}{(3 \times 10^8\ \text{m/s})^2}}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0,21\ \text{nm}}$$

(b) Numa transição para o estado fundamental, teremos

$$hf = 10,2\ \text{eV} = (13,6\ \text{eV})\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Podemos verificar que esta relação é satisfeita para $n = 2$, uma vez que

$$13,6 \times \frac{3}{4} = \frac{136}{4}\frac{3}{10} = 34 \times \frac{3}{10} = 10,2$$

(c) $$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \Rightarrow \Delta E \approx \frac{1 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{2 \cdot 10^{-8}\ \text{s}} \Rightarrow \boxed{\Delta E \approx 0,5 \times 10^{-26}\ \text{J}}$$

Observação: No formulário da P2, o valor de $\hbar$ estava incorreto ($\hbar = 7 \times 10^{-34}$ J.s), sendo que o valor correto é $\hbar \approx 1 \times 10^{-34}$ J.s. Portanto, além da resposta acima, também será considerada correta, a resposta abaixo:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \Rightarrow \Delta E \approx \frac{7 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{2 \cdot 10^{-8}\ \text{s}} \Rightarrow \boxed{\Delta E \approx 3,5 \times 10^{-26}\ \text{J}}$$

Questão 4

Uma estrela de raio R e temperatura T emite radiação como um corpo negro.

(a) (1,0 ponto) Calcule a potência total irradiada pela estrela.

(b) (1,0 ponto) Calcule a quantidade massa Δm perdida pela estrela durante um intervalo de tempo Δt. Expresse sua resposta em termos da constante de Stefan-Boltzmann, de c, T, R e Δt.

(c) (0,5 ponto) Se a temperatura da estrela for igual a 3000 K, qual é o comprimento de onda que produz a máxima emitância espectral?

Solução da questão 4

(a) $I_{total} = \sigma T^4 \Rightarrow \dfrac{P}{4\pi R^2} = \sigma T^4 \Rightarrow \boxed{P = 4\pi R^2 \sigma T^4}$

(b) A energia perdida E pela estrela num intervalo de tempo Δt é:

$E = P\Delta t = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Delta t.$

Utilizando a relação $E = \Delta m c^2$, encontramos:

$$\boxed{\Delta m = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4 \Delta t}{c^2}}$$

(c) Utilizando a lei de deslocamento de Wien com $T = 3000$ K, temos:

$\lambda_{máx} T = 3 \times 10^{-3}\text{m} \cdot \text{K} \Rightarrow \boxed{\lambda_{máx} = 1\ \mu\text{m}}$

Formulário

$\hbar \approx 1 \times 10^{-34}$J·s, $\quad$ 1eV $= 1,6 \times 10^{-19}$J, $\quad h = 4,2 \times 10^{-15}$ eV · s, $\quad c = 3 \times 10^{8}$ m/s

$\Delta x \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta t \geq \dfrac{\hbar}{2}, \quad \hbar = h/2\pi, \quad \int \mathrm{sen}^2(ax)dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\mathrm{sen}(2ax)}{4a}$

$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar,\ L_z = m_\ell\,\hbar,\ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar,\ S_z = m_s\,\hbar,$

$\lambda = \dfrac{h}{p}, \quad E_n = -\dfrac{13,6}{n^2}$ eV, $\quad E_n = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$

$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\pi}\ \alpha^{-1/2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \alpha^{-3/2}.$

$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = H\Psi(x,t), \qquad \Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ onde E é a energia.

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad dV = dxdydz, \quad dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi,$

$I(\lambda,T) = \dfrac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left[\exp\left(\dfrac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]}, \quad I_{total} = \sigma T^4, \quad \lambda_{máx}T = 3 \times 10^{-3}$ m · K .

$K_{máx} = hf - \phi$

$\int_0^d x^2 e^{-x}dx = 2 - (d^2+2d+2)e^{-d}$ e $\int_d^\infty x^2 e^{-x}dx = (d^2+2d+2)e^{-d}.$