Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2022

GABARITO DA REC

9 de fevereiro de 2023

Questão 1

Luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 600$ nm atravessa uma fenda simples de largura 0,9 mm. Considerando que após atravessar a fenda, a luz atinge uma tela localizada a uma distância muito maior do que a largura da fenda, calcule:

(a) (1,5 ponto) a distância em metros entre a fenda e a tela considerando que o primeiro mínimo de difração ocorre a uma distância de 1 mm do centro da tela.

(b) (1,0 ponto) a distância aproximada entre o máximo central e o primeiro máximo secundário da figura de difração?

Solução da questão 1

(a) A intensidade I da figura de difração é dada pela seguinte expressão:

$$I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2,$$

onde

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

Observando as expressões acima, podemos ver que o primeiro mínimo de difração ocorre quando $\beta/2 = \pi$. Considerando a aproximação $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = y/L$, temos:

$$2\pi = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow 1 = \frac{a}{\lambda}\frac{y}{L} \Rightarrow L = \frac{ay}{\lambda}.$$

Considerando $a = 0{,}9$ mm, $y = 1$ mm, e $\lambda = 600$ nm, encontramos:

$$\boxed{L = 1,5 \text{ m}}$$

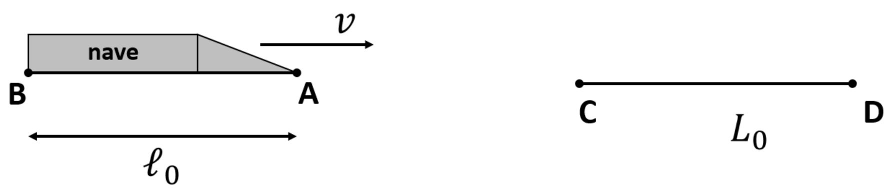
(b) O primeiro máximo secundário está localizado aproximadamente no meio entre o primeiro mínimo e o segundo mínimo de difração. O primeiro mínimo ocorre em $y = 1$ mm. Para encontrar a posição do segundo mínimo, podemos utilizar:

$$4\pi = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow 2 = \frac{a}{\lambda}\frac{y}{L} \Rightarrow y = \frac{2\lambda L}{a} \Rightarrow y = 2 \text{ mm}.$$

Logo, o primeiro máximo secundário ocorre em: $\boxed{y = 1,5 \text{ mm}}$

Questão 2

(I) Uma nave espacial, de comprimento próprio ℓ_0, viaja com velocidade v relativa a uma estação espacial, de comprimento próprio L_0, como mostra a figura. As extremidades da nave e da estação espacial são indicadas por A, B, C, e D. Considerando efeitos relativísticos, pede-se:



(a) (0,5 ponto) No referencial da nave, quanto tempo transcorre entre a passagem de A por C e B por D?

(b) (0,5 ponto) No referencial da estação espacial, quanto tempo transcorre entre a passagem de A por C e B por D?

(II) (1,5 pontos) Uma partícula com massa de repouso m_0 viaja com velocidade $0,8c$ e sofre uma colisão inelástica com uma partícula idêntica, mas em repouso. O resultado desta colisão é uma única partícula, com velocidade V e massa de repouso M_0. Calcule o fator de Lorentz (ou fator gama) para a partícula incidente e escreva as equações que expressam a conservação de energia e conservação do momento linear no sistema, em função das massas (m_0 e M_0), velocidade final da partícula (V) e da velocidade da luz.

Solução da questão 2

(I) (a) Estando A em C, a nave terá que percorrer a estação espacial, que em seu referencial tem comprimento L_0/γ, além da distância ℓ_0. Logo, o tempo de viagem será:

$$\boxed{\Delta t' = \frac{L_0/\gamma + \ell_0}{v}}$$

(b) No referencial da estação espacial é o comprimento da nave que é contraído, logo o tempo de viagem será:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\ell_0/\gamma + L_0}{v}}$$

(II) Fator de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,64}} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{5}{3}}$$

Conservação de energia:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Substituindo $v = 0,8c$ na equação acima, obtemos

$$\frac{5 m_0 c^2}{3} + m_0 c^2 = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{8 m_0}{3} = \frac{M_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}}$$

Conservação do momento linear:

$$p_i = p_f \Rightarrow \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{M_0 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{4 m_0 c}{3} = \frac{M_0 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}}$$

Questão 3

I (1,5 ponto) Um objeto cilíndrico de raio R e comprimento L irradia como um corpo negro. Num intervalo de tempo Δt, a energia total irradiada pelo objeto em forma de ondas eletromagnéticas é E. Calcule a temperatura do objeto em função dos parâmetros dados acima e eventuais constantes.

II (1,0 ponto) Luz monocromática atinje uma superfície metálica e causa a remoção de elétrons da superfície através do efeito fotoelétrico. Considerando que os eletróns ejetados possuem uma energia cinética máxima K e a superfície metálica possui função de trabalho ϕ, calcule o comprimento de onda da luz monocromática.

Solução da questão 3

(I) A área total A da superfície do objeto cilíndrico é

$A = 2\pi RL + 2\pi R^2,$

e a potência total irradiada durante o intervalo Δt é

$P = \dfrac{E}{\Delta t}.$

A partir das expresões acima, intensidade I da radiação emitida pelo objeto é:

$I = \dfrac{P}{A} = \dfrac{E}{\Delta t(2\pi RL + 2\pi R^2)}.$

Utilizando a expressão $I = \sigma T^4$, encontramos:

$$T = \left(\frac{I}{\sigma}\right)^{1/4} \Rightarrow \boxed{T = \left[\frac{E}{\sigma \Delta t(2\pi RL + 2\pi R^2)}\right]^{1/4}}$$

(II) O efeito fotoelétrico pode ser descrito através da seguinte expressão:

$K = hf - \phi \Rightarrow K = \dfrac{hc}{\lambda} - \phi$

Isolando λ na expressão acima, encontramos:

$$\boxed{\lambda = \frac{hc}{K + \phi}}$$

Questão 4

Em um determinado instante, o estado quântico de uma partícula confinada em uma região $-a \leq x \leq a$ é descrito pela função de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2)^{1/2} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

sendo A e a constantes reais e positivas.

(a) (0,5 ponto) Determine a constante A e faça um esboço da função densidade de probabilidade.

(b) (0,5 ponto) Qual é a probabilidade de encontrar a partícula em uma região $x \geq 0$?

(c) (1,0 ponto) Calcule os valores médios $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ e determine o desvio padrão $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

(d) (0,5 ponto) Usando o princípio da incerteza para os observáveis de posição e momento, determine a incerteza mínima no momento da partícula.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) Utilizando a condição de normalização

$\int_{-a}^{a} \psi^2(x)dx = 1$, temos

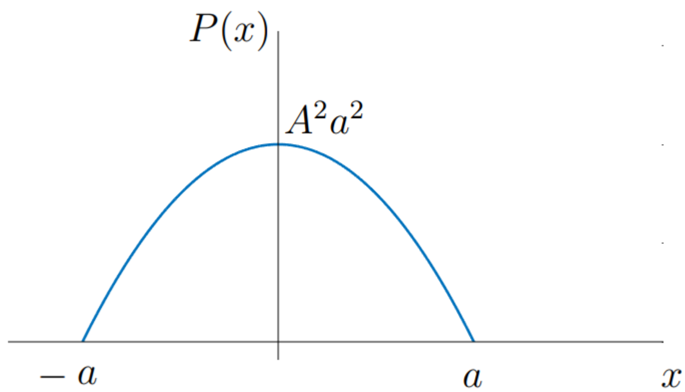
$$A^2 \int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = 1 \Rightarrow A^2 \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = 1 \Rightarrow$$

$$A^2 \left[2a^3 - 2\frac{a^3}{3}\right] = 1 \Rightarrow A^2 \left[\frac{4a^3}{3}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a^3}}}$$

A função densidade de probabilidade $P(x)$ é dada por:

$P(x) = \psi^2(x) = A^2(a^2 - x^2)$.

A figura abaixo mostra o esboço dessa função



(b) Como a função acima possui simetria, a probabilidade de encontrar a partícula na região $x \geq 0$ é $1/2$. Portanto: $\boxed{P = 1/2}$

(c) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi^2(x)dx = \dfrac{3}{4a^3}\int_{-a}^{+a} x(a^2 - x^2)dx = 0 \Rightarrow \boxed{\langle x \rangle = 0}$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\psi^2(x)dx = \frac{3}{4a^3}\int_{-a}^{+a} x^2(a^2 - x^2)dx = \frac{a^2}{5} \Rightarrow \boxed{\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{5}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{a}{\sqrt{5}}}$$

(d) Segundo o princípio da incerteza,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Usando o resultado anterior, encontramos $\boxed{\Delta p_x = \dfrac{\sqrt{5}\hbar}{2a}}$

Formulário

$$I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta,$$

$$I = I_0 \cos^2(\phi/2), \quad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta,$$

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1)m_0c^2, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda$$

$E_n = -hcR_H/n^2$, onde $hcR_H = 13.6$ eV, $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>,

$$\lambda = h/p, \quad \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6 \times 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}\,; \quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}\,;$$

$$\int x^3 e^{-x} dx = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}, \quad \int x^2 e^{-x} dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$