Física IV - 4323204

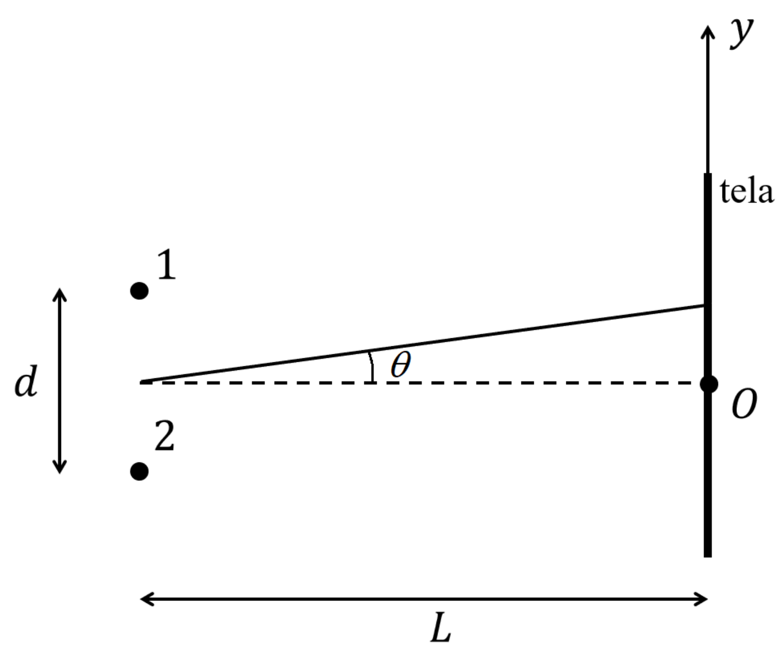
Escola Politécnica - 2022

GABARITO DA SUB

15 de dezembro de 2022

Questão 1

Duas fontes coerentes, separadas por uma distância d, emitem ondas monocromáticas com comprimento de onda λ, produzindo franjas claras e escuras numa tela situada a uma distância $L \gg d$ das duas fontes. Considerando que as ondas são emitidas com uma diferença de fase de 180^o e que é válida a aproximação $\text{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta$, determine, para $y \geq 0$:



(a) (1,0 ponto) Os valores de y onde ocorre interferência destrutiva.

(b) (1,0 ponto) Os valores de y onde ocorre interferência construtiva.

(c) (0,5 ponto) No ponto O, haverá uma franja clara ou escura?

Solução da questão 1

(a) Para que haja interferência destrutiva na tela, a diferença de fase entre as ondas provenientes das fontes 1 e 2 deve satisfazer:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\,\text{sen}\theta + \pi = (m + 1/2)2\pi$$

Considerando a aproximação $\text{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta$, temos $\text{sen}\theta \approx y/L$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y}{L} + \pi = (m + 1/2)2\pi$$

Portanto: $\boxed{y = \frac{m\lambda L}{d}}$, sendo m = 0, 1, 2, 3 ...

(b) Para que haja interferência construtiva na tela, a diferença de fase entre as ondas provenientes das fontes 1 e 2 deve satisfazer:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\,\text{sen}\theta + \pi = 2\pi m$$

Considerando a aproximação $\text{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta$, temos $\text{sen}\theta \approx y/L$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y}{L} + \pi = 2\pi m$$

Portanto: $\boxed{y = \frac{\lambda L}{d}(m - 1/2)}$, sendo m = 1, 2, 3 ...

(c) $\boxed{\text{franja escura}}$

Questão 2

Suponha um trem extremamente veloz, de comprimento próprio igual a 100 m, e com uma velocidade $\vec{v} = 0,8c\hat{i}$, sendo c a velocidade da luz. Esse trem atravessa um túnel de comprimento próprio igual a 70 m.
(Obs. Não é necessário substituir o valor de c em suas respostas)

(a) (0,5 ponto) Qual o comprimento do trem medido por um observador parado próximo a entrada do túnel?

(b) (0,5 ponto) No referencial do túnel, quanto tempo o trem permanece completamente dentro do túnel?

(c) (0,5 ponto) Do ponto de vista do maquinista do trem, qual é o comprimento do túnel?

(d) (1,0 ponto) Considere agora um outro trem vindo na direção do primeiro em sentido oposto, com velocidade $\vec{v}_2 = -0,8c\hat{i}$ em relação ao túnel. Qual é a velocidade do segundo trem medida pelo maquinista do primeiro trem?

Solução da questão 2

(a) $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5/3$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{100\text{ m}}{5/3} = 60\text{ m} \Rightarrow \boxed{L = 60\text{ m}}$$

(b) $\Delta t = \dfrac{(70\text{ m - }60\text{ m})}{0,8c} = \dfrac{12{,}5\text{ m}}{c} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \dfrac{12{,}5\text{ m}}{c}}$

(c) $L_{\text{túnel}} = \dfrac{L_{0\text{ túnel}}}{\gamma} = \dfrac{70\text{ m}}{5/3} \Rightarrow \boxed{L_{\text{túnel}} = 42\text{ m}}$

(d) $v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}} = \dfrac{-0,8c - 0,8c}{1 - \dfrac{(0,8c)\times(-0,8c)}{c^2}} = -\dfrac{160c}{164} \approx -0,98c \Rightarrow \boxed{v'_x = -\dfrac{160c}{164} \approx -0,98c}$

Questão 3

Um fóton, de comprimento de onda λ, incide sobre um elétron em repouso, cuja massa de repouso é m_e. Observa-se que o fóton espalhado possui comprimento de onda $\lambda + \Delta\lambda$, com $\Delta\lambda = h/(m_e c)$.

(a) (0,5 ponto) Calcule o ângulo de espalhamento do fóton.

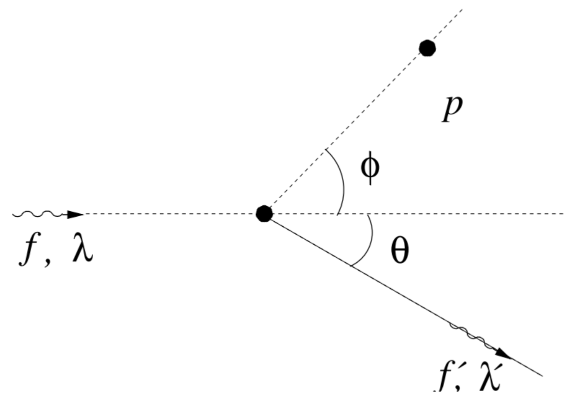
(b) (1,0 ponto) Determine a energia cinética do elétron, após a colisão, em termos da constante de Planck h, da velocidade da luz c e de $\Delta\lambda$.

(c) (1,0 ponto) Determine o módulo do momento linear do elétron, após a colisão, em termos de λ e $\Delta\lambda$.

Solução da questão 3

(a) O ângulo θ de espalhamento do fóton é dado pela equação (veja figura abaixo):

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$



Como $\Delta\lambda = h/(m_e c)$, obtemos:

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda(1 - \cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

(b) Pelo princípio da conservação de energia, temos:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + m_e c^2 + K \Rightarrow K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \Rightarrow$$

$$\boxed{K = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right) = \frac{hc}{\lambda}\frac{\Delta\lambda}{(\lambda + \Delta\lambda)}}$$

(c) Considerando a conservação do momento linear (veja figura acima), temos:

<u>direção x</u>:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + p_e\cos\phi = p_e\cos\phi$$

<u>direção y</u>:

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\,\mathrm{sen}\theta - p_e\,\mathrm{sen}\phi = \frac{h}{\lambda'} - p_e\,\mathrm{sen}\phi$$

Logo,

$$p_e^2\cos^2\phi + p_e^2\,\mathrm{sen}^2\phi = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2$$

ou seja:

$$\boxed{p_e = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2} = \frac{h}{\lambda}\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{(\lambda + \Delta\lambda)^2}}}$$

Questão 4

Uma partícula de massa m e com energia E está sujeita a um poço de potencial semi-infinito dado por

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ U_0 & x > L \end{cases}$$

Considere o caso em que a partícula está ligada ao potencial, de modo que $0 < E < U_0$. Denote as funções de onda estacionárias (soluções da equação de Schrödinger independente do tempo) nas regiões $x < 0$, $0 \leq x \leq L$, e $x > L$, respectivamente, por $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, e $\psi_3(x)$

(a) (0,5 ponto) Qual deve ser a função de onda $\psi_1(x)$ (justifique)? Escreva as equações de Schrödinger para as funções $\psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$.

(b) (1,0 ponto) Obtenha as soluções fisicamente aceitáveis para $\psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$, expressando sua resposta em termos das grandezas $k^2 \equiv 2mE/\hbar^2$ e $\alpha^2 \equiv 2m(U_0 - E)/\hbar^2$ e de constantes de normalização a serem determinadas.

(c) (0,5 ponto) Imponha a condição de contorno de continuidade da função de onda em $x = 0$ e determine a forma geral de $\psi_2(x)$ em termos de uma constante de normalização.

(d) (0,5 ponto) Imponha as condições de contorno de continuidade da função de onda e de sua derivada, em $x = L$; obtenha a relação que determina os possíveis valores da energia E.

Solução da questão 4

(a) Na região onde o potencial é infinito, a função de onda se anula, logo $\boxed{\psi_1(x) = 0}$.

Nas regiões 2 e 3, as funções de onda estacionárias satisfazem as equações:

$$\boxed{\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = \frac{-2mE}{\hbar^2}\psi_2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\psi_3}{dx^2} = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}\psi_3}$$

(b) Na região 2, a equação de Schrödinger pode ser escrita como:

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = -k^2\psi_2$$

cuja solução geral é:

$$\boxed{\psi_2(x) = A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)}$$

Na região 3, a equação de Schrödinger pode ser escrita como:

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} = +\alpha^2\psi_3$$

cuja solução geral é:

$$\psi_3(x) = C\exp(-\alpha x) + D\exp(\alpha x)$$

A condição de que a função de onda tenda a zero quando $x \to \infty$, resulta em $D = 0$.

Logo:

$$\boxed{\psi_3(x) = C\exp(-\alpha x)}$$

(c) Utilizando a condição de contorno $\psi_I(0) = \psi_2(0)$, teremos:

$$0 = A\,\mathrm{sen}(0) + B\cos(0) \Rightarrow B = 0.$$

Logo: $\boxed{\psi_2(x) = A\,\mathrm{sen}(kx)}$

(d) As condições de contorno em $x = L$ são

$\psi_2(L) = \psi_3(L)$ e $\psi_2'(L) = \psi_3'(L)$

Portanto:

$$A\,\mathrm{sen}(kL) = C\exp(-\alpha L)$$

$$kA\cos(kL) = -\alpha C\exp(-\alpha L)$$

Dividindo uma equação pela outra, teremos:

$$\tan(kL) = -\frac{k}{\alpha}$$

Finalmente, substituindo k e α na equação acima, encontramos:

$$\boxed{\tan(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L) = -\sqrt{\frac{E}{U_0 - E}}}$$

Formulário

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\text{sen}\,\theta, \qquad \begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1)m_0 c^2, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda$$

$E_n = -hcR_H/n^2$, onde $hcR_H = 13.6$ eV, $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>,

$$\lambda = h/p, \quad \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6 \times 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}\,; \quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}\,;$$

$$\int x^3 e^{-x} dx = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}, \quad \int x^2 e^{-x} dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$