Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2023

GABARITO DA REC

1 de fevereiro de 2024

Questão 1

Em um experimento de difração, elétrons com massa m e velocidade v incidem em uma fenda simples, de largura a. Após atravessar a fenda, os elétrons atingem uma tela localizada a uma distância L da fenda. Assumindo $L \gg a$, calcule:

(a) (0,5 ponto) o comprimento de onda de de Broglie dos elétrons que antingem a fenda.

(b) (1,0 ponto) a distância aproximada entre o máximo central e o primeiro mínimo secundário da figura de difração.

(c) (1,0 ponto) a distância aproximada entre o máximo central e o primeiro máximo secundário da figura de difração.

Solução da questão 1

(a) $\boxed{\lambda = \dfrac{h}{mv}}$

(b) A intensidade I da figura de difração é dada pela seguinte expressão:

$$I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2,$$

onde

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

Observando as expressões acima, podemos ver que o primeiro mínimo de difração ocorre quando $\beta/2 = \pi$. Considerando a aproximação $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = y/L$, temos:

$$2\pi = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow 1 = \frac{a}{\lambda}\frac{y}{L} \Rightarrow y = \frac{\lambda L}{a} \Rightarrow \boxed{y = \frac{hL}{amv}}.$$

(c) O primeiro máximo secundário está localizado aproximadamente no meio entre o primeiro mínimo e o segundo mínimo de difração. O primeiro mínimo ocorre em $y_1 = hL/(amv)$. Para encontrar a posição do segundo mínimo, podemos utilizar:

$$4\pi = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow 2 = \frac{a}{\lambda}\frac{y}{L} \Rightarrow y = \frac{2\lambda L}{a} \Rightarrow y_2 = \frac{2hL}{amv}.$$

Logo, o primeiro máximo secundário ocorre em:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{hL}{2amv} + \frac{2hL}{2amv} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3hL}{2amv}}$$

Questão 2

Uma partícula de massa de repouso m_0 e energia cinética $K = 2m_0c^2$ colide com uma partícula em repouso, que possui massa de repouso $2m_0$. A colisão resulta em uma única partícula.

(a) (1,0 ponto) Calcule a velocidade da partícula incidente antes da colisão.

(b) (1,0 ponto) Calcule a velocidade da partícula resultante após a colisão.

(c) (0,5 ponto) Calcule a massa da partícula resultante após a colisão.

Solução da questão 2

(a) $K = (\gamma - 1)m_0c^2 \Rightarrow 2m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2 \Rightarrow \gamma = 3$

Logo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow v = c\sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} \Rightarrow \boxed{v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c}$$

(b) Equação da conservação de energia:

$$m_0c^2 + 2m_0c^2 + 2m_0c^2 = \gamma' M_0c^2 \Rightarrow 5m_0 = \gamma' M_0$$

Equação da conservação do momento linear:

$$\gamma m_0 v = \gamma' M_0 V \Rightarrow 2\sqrt{2}m_0c = \gamma' M_0 V$$

Dividindo a equação da conservação de momento pela equação de conservação de energia, obtemos:

$$\boxed{V = \frac{2\sqrt{2}c}{5}}$$

(c) $$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{25}}} \Rightarrow \gamma' = \frac{5}{\sqrt{17}}$$

Substituindo $\gamma' = 5/\sqrt{17}$ na equação de conservação de energia, encontramos:

$$\boxed{M_0 = \sqrt{17}m_0}$$

Questão 3

I (1,5 ponto) Um objeto em forma de cubo, de lado a, irradia como um corpo negro. Sabendo-se que o objeto possui temperatura T, calcule a perda de massa Δm do objeto num intervalo de tempo Δt. Expresse sua resposta em termos dos dados acima e eventuais constantes físicas.

II (1,0 ponto) Luz monocromática de comprimento de onda λ e intensidade I atinge uma superfície metálica com função de trabalho ϕ. Considerando que os elétrons possuem massa m, qual é a máxima velocidade dos elétrons removidos do material? Despreze efeitos relativísticos.

Solução da questão 3

(I) A área total A da superfície do objeto é

$A = 6a^2,$

e a energia total irradiada durante o intervalo Δt é

$E = P\Delta t \Rightarrow E = (IA)\Delta t \Rightarrow E = \sigma T^4 A\Delta t.$

Logo, a perda de massa Δm é dada por

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} \Rightarrow \Delta m = \frac{\sigma T^4 6a^2 \Delta t}{c^2} \Rightarrow \boxed{\Delta m = \frac{6\sigma T^4 a^2 \Delta t}{c^2}}$$

(II) A energia cinética máxima dos elétrons removidos é calculada através de:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

Logo,

$$K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2K_{max}}{m}} \Rightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - \phi\right)}}$$

Questão 4

Em um átomo de hidrogênio contendo um único elétron ocorre uma transição do estado $n = 3$ para o estado $n = 1$, de modo que a função de onda para este último estado seja

$$\psi(r, \theta, \phi) = Ae^{-r/a_0}$$

(a) (1,0 ponto) Calcule o comprimento de onda do fóton emitido. Expresse sua resposta em termos da constante de Rydberg.

(b) (1,0 ponto) Calcule a constante A.

(c) (0,5 ponto) Qual é o módulo do momento angular orbital após a transição?

Solução da questão 4

(a) A energia do fóton emitido é:

$$E = E_3 - E_1 = -\frac{hcR_H}{3^2} + \frac{hcR_H}{1^2} = \frac{8hcR_H}{9}$$

Logo, o comprimento de onda do fóton emitido é

$$\lambda = \frac{hc}{E} \Rightarrow \boxed{\frac{9}{8R_H}}$$

(b) $$\int_0^\infty |\psi|^2 dV = 1 \Rightarrow \int_0^\infty \left[A^2 e^{-2r/a_0}\right](4\pi r^2 dr) = 1 \Rightarrow$$

$$4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr = 1$$

Utilizando a mudança de variável $x = 2r/a_0$ na equação acima, encontramos:

$$\left(\frac{\pi A^2 a_0^3}{2}\right) \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 1 \Rightarrow \left(\frac{\pi A^2 a_0^3}{2}\right) 2 = 1 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}}$$

(c) Para $n = 1$, temos $\ell = 0$, e $m_\ell = 0$. Logo:

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = 0 \Rightarrow \boxed{L = 0}$$

Formulário

$$I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta,$$

$$I = I_0\cos^2(\phi/2), \quad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta,$$

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1)m_0c^2, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda$$

$E_n = -hcR_H/n^2$, onde $hcR_H = 13.6$ eV, $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do fóton,

$$\lambda = h/p, \quad \Delta x\Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y\Delta p_y \geq \hbar/2, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6\times 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}\ ; \quad \lambda_m T = 2,9\times 10^{-3}\ \mathrm{m\cdot K}\ ;$$

$$\int x^3 e^{-x}dx = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}, \quad \int x^2 e^{-x}dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$