Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2024

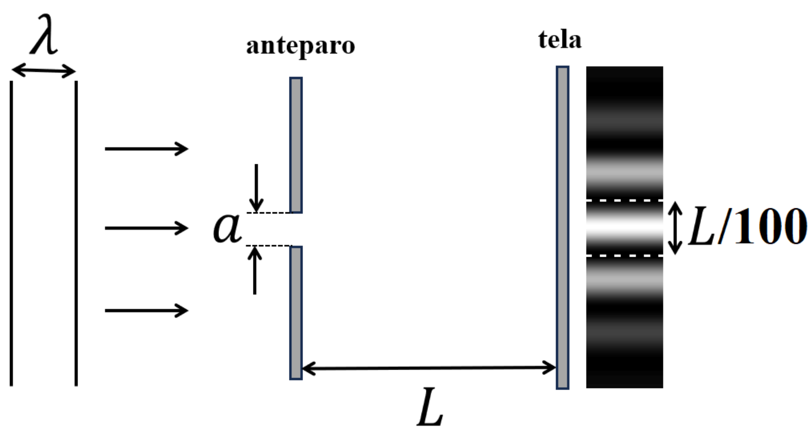
GABARITO DA P1

12 de setembro de 2024

Questão 1

Nas situações descritas abaixo, assuma que os ângulos envolvidos são pequenos, de modo que as aproximações $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ sejam válidas.

(I) (1,5 ponto) Em um experimento de difração de luz, observa-se que a largura do máximo central da figura de difração produzida por uma fenda de largura a é 100 vezes menor que a distância L entre o anteparo e a tela de observação, conforme ilustrado na figura. Determine a razão λ/a, onde λ é o comprimento de onda da luz monocromática utilizada no experimento.



(II) (1,5 ponto) Considere luz com dois comprimentos de onda λ_1 e λ_2, não coerentes entre si, incidindo sobre um anteparo contendo 2 fendas de larguras desprezíveis, que estão separadas por uma distância d. Determine a razão λ_1/λ_2 para que a posição de um mínimo de ordem m do padrão de interferência observado em uma tela distante, produzido por λ_2, coincida com a posição do máximo de mesma ordem, produzido por λ_1.

Solução da questão 1

(I) A largura da franja central clara é determinada pelos primeiros mínimos adjacentes ao máximo central:

$$\text{sen}\frac{\beta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{ka}{2}\,\text{sen}\theta = m\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow \,\text{sen}\theta_1 = \frac{2\pi}{ka} = \frac{\lambda}{a} \\ m = -1 \Rightarrow \,\text{sen}\theta_2 = -\frac{2\pi}{ka} = -\frac{\lambda}{a} \end{cases}$$

$$\text{sen}\theta_i \simeq y_i/L \Rightarrow y_1 - y_2 = 2L\frac{\lambda}{a} = \frac{L}{100}\ \text{(dado)} \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{200}}$$

(II) Em ordem m o máximo de λ_1 é tal que $\text{sen}\theta_1 = \frac{m\lambda_1}{d}$, onde $m = 1, 2, 3, ...$

Em ordem m o mínimo de λ_2 é tal que $\text{sen}\theta_2 = \frac{(m-1/2)\lambda_2}{d}$, onde $m = 1, 2, 3, ...$

Para $\text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_1/\lambda_2 = \frac{(m-1/2)}{m}, \text{onde } m = 1, 2, 3...}$

Questão 2

Uma película transparente de espessura $t = 4 \times 10^{-5}$ cm e com índice de refração $n = 1,5$ é iluminada por luz branca. A película está imersa no ar ($n_{\text{ar}} \approx 1,0$). Considere que a incidência da luz é normal à superfície da película e expresse a sua resposta em termos do comprimento de onda no ar, representado por λ.

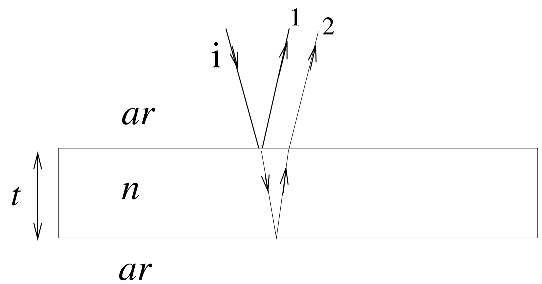
(a) (1,0 ponto) A luz refletida terá alguns comprimentos de onda intensificados. Obtenha a equação que determina esses comprimentos de onda.

(b) (0,5 ponto) A luz visível tem comprimento de onda entre 400 nm e 700 nm. Quais desses comprimentos de onda da luz visível serão intensificados?

(c) (1,0 ponto) Qual é o valor mínimo de t tal que nenhum comprimento de onda visível seja intensificado?

Solução da questão 2

(a) O raio incidente i se divide no raio refletido 1 e no raio refratado 2, conforme a figura.



Como o índice de refração da película é maior que o do vácuo, o raio 1 vai se defasar de π radianos ($\phi_1 = \pi$). A defasagem do raio 2 é devida apenas ao percurso $2t$, no interior da película ($\phi_2 = 2\pi/\lambda_n\, 2t$) Para haver interferência construtiva devemos ter $\phi_2 - \phi_1 = m\, 2\pi$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Ou seja,

$$(\frac{2\pi}{\lambda_n})2t - \pi = m2\pi.$$

Usando $\lambda_n = \lambda/n$ (λ é o comprimento de onda no ar), teremos

$$\boxed{2nt = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, ...}$$

(b) Do item (a) vem

$$\lambda = \frac{2nt}{m + 1/2} = \frac{4nt}{2m+1} = \frac{(4 \times 1,5)(4 \times 10^{-7})}{2m+1} = \frac{24 \times 10^{-7}}{2m+1}$$

$$\lambda_m \equiv \frac{24}{2m+1} \times 10^{-7} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\lambda_0 = 24 \times 10^{-7} \\ &\lambda_1 = 8,0 \times 10^{-7} \\ &\lambda_2 = 4,8 \times 10^{-7} \Leftarrow \text{visível} \\ &\lambda_3 = 3,4 \times 10^{-7} \\ &\lambda_4 = 2,7 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

Portanto, $\boxed{\lambda_2 = 480 \text{ nm}}$

(c) Para o comprimento de onda $\lambda = 400\,\text{nm}$ não haverá interferência construtiva se $m = 0$ e a espessura t satisfazer

$$400\,\text{nm} = \frac{2nt}{1/2} \Longrightarrow t = \frac{400}{4 \times 1,5} = 66,7\,\text{nm}$$

Para o comprimento de onda $\lambda = 700\,\text{nm}$ não haverá interferência construtiva se $m = 0$ e a espessura t satisfazer

$$700\,\text{nm} = \frac{2nt}{1/2} \Longrightarrow t = \frac{700}{4 \times 1,5} = 116,7\,\text{nm}$$

,

além disso, para $m = 1$ e $\lambda = 400$ nm, temos:

$$400\,\text{nm} = \frac{2nt}{3/2} \Longrightarrow t = \frac{400 \times 3}{4 \times 1,5} = 200\,\text{nm}$$

,

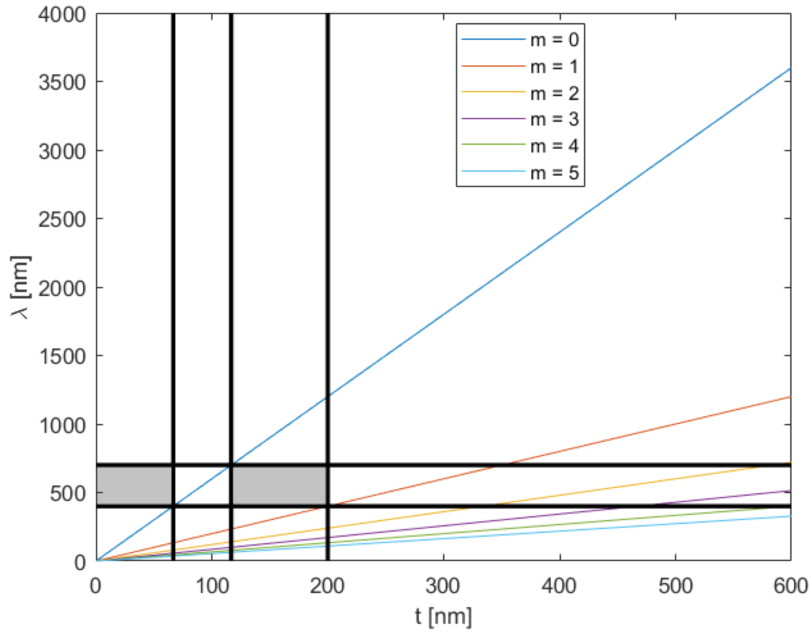
Portanto, não haverá comprimentos de onda intensificados na região visível se

$$\boxed{t < 66,7 \text{ nm}}$$

ou

$$\boxed{116{,}7 \text{ nm} < t < 200 \text{ nm}}$$

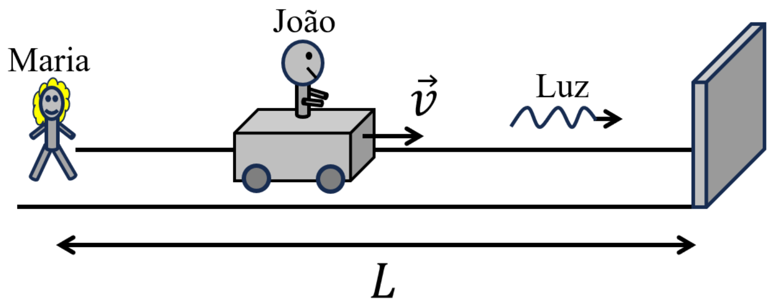
A região cinza no gráfico abaixo mostra as regiões onde não há interferência construtiva.



m = 0
m = 1
m = 2
m = 3
m = 4
m = 5
λ [nm]
t [nm]
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
100
200
300
400
500
600

Questão 3

(I) Maria, em repouso no referencial S_M, envia um sinal de luz laser em direção a uma parede à sua frente, localizada a uma distância que ela mede como sendo igual a L. No instante da emissão do sinal luminoso por Maria, João passa por ela em um carro com velocidade constante $\vec{v}$ em direção à parede.



(a) (0,5 ponto) Para Maria, qual é o tempo t_M que leva para o sinal viajar de Maria até a parede?

(b) (1,0 ponto) Para João, qual é o tempo t_J que leva para o sinal viajar de Maria até a parede? Deixe sua resposta em função de L.

(c) (1,0 ponto) Qual é a distância que João, segundo ele, se encontra da parede no instante da chegada do sinal?

(II) O píon neutro, π^0, é uma partícula subatômica instável com um tempo de decaimento muito curto. No referencial do laboratório, um píon é produzido na posição $x = 0$ no instante $t = 0$ e se propaga com uma velocidade $v = \frac{4}{5}\,c$ (c sendo a velocidade da luz) até ser detectado por um detector localizado a uma distância L do ponto de produção.

(a) (1,0 ponto) Determine o intervalo de tempo entre o píon ser produzido e detectado no referencial do laboratório. Expresse sua resposta em termos de c e L.

(b) (1,0 ponto) Calcule o tempo decorrido no referencial inercial do píon entre sua produção e sua detecção. Expresse sua resposta em termos de c e L.

Solução da questão 3

(I)

(a) $\boxed{t_M = L/c}$

(b)

$$\frac{L}{\gamma} - vt_J = ct_J \Rightarrow t_J = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{(c+v)} = \frac{L\gamma}{\gamma^2}\frac{1}{(c+v)} = \frac{L\gamma}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Ou, usando as TL para o evento: "sinal na parede":

Em S_M: $(x_M; t_M) = (L; L/c)$

Em S_J: $t_J = \gamma\left(t_M - \frac{v}{c^2}x_M\right) = \gamma\left(\frac{L}{c} - \frac{v}{c^2}L\right) = \frac{L\gamma}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$

Portanto,

$$\boxed{t_J = \frac{L\gamma}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

(c) $x_J = ct_J = L\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)$

Ou, usando as TL para o evento: "sinal na parede":

Em S_M: $(x_M; t_M) = (L; L/c)$

Em S_J: $x_J = \gamma(x_M - vt_M) = \gamma(L - vL/c) = L\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)$

Portanto,

$$\boxed{x_J = L\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

(II)

(a) No referencial do laboratório, o intervalo de tempo T necessário para que o píon seja detectado a uma distância L é dado por:

$$T = \frac{L}{v} = \frac{L}{\frac{4}{5}c} = \frac{5L}{4c} \Rightarrow \boxed{T = \frac{5L}{4c}}$$

(b) No referencial do píon, o tempo decorrido $\Delta t'$ entre sua produção e detecção é dado pela dilatação do tempo[1]:

$$\Delta t' = \frac{T}{\gamma}$$

[1]Pode ser resolvido usando as transformações de Lorentz, da seguinte forma:

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$$

Onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Substituindo $v = \frac{4}{5}c$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3}$$

Portanto:

$$\Delta t' = \frac{3T}{5} = \frac{3L}{4c} \Rightarrow \boxed{\Delta t' = \frac{3L}{4c}}$$

Substituindo $\Delta t = T$ (intervalo de tempo no referencial do laboratório), $\Delta t' = T'$ (intervalo de tempo próprio no referencial do píon), $\Delta x' = 0$ (intervalo espacial no referencial no píon), teremos

$$T' = \frac{1}{\gamma}T.$$

Formulário

Velocidade da luz no vácuo $c = 3.10^8$ m/s e 1 nm $= 10^{-9}$ m

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \\ v'_y = \dfrac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}, \\ v'_z = \dfrac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - uv_x/c^2}. \end{cases}$$

O referencial S' se move em relação a S com velocidade $\vec{u} = u\,\hat{\imath}$.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \ell = \ell_0\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

$$I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad I = I_0\cos^2(\phi/2)\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2,$$

$$\phi = 2\pi d\,\operatorname{sen}\theta/\lambda, \quad \beta = 2\pi a\,\operatorname{sen}\theta/\lambda, \quad 2d\,\operatorname{sen}\theta = m\lambda, \quad \theta_{mín} \approx \frac{\lambda}{a}.$$