Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2024

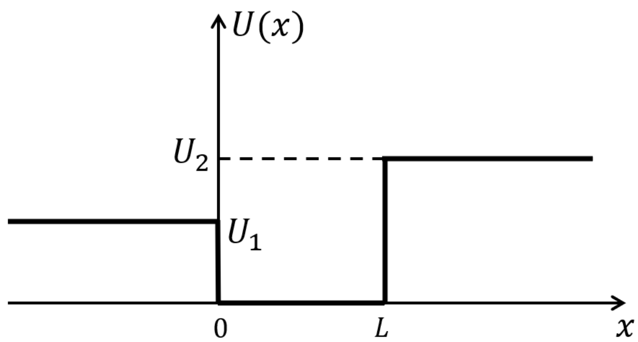
GABARITO DA P3

28 de novembro de 2024

Questão 1

Um elétron é confinado pelo potencial

$$U(x) = \begin{cases} U_1 \text{ se } x < 0 \quad \text{(Região I)} \\ 0 \text{ se } 0 \leq x < L \quad \text{(Região II)} \\ U_2 \text{ se } x \geq L \quad \text{(Região III)}, \end{cases}$$



onde $U_2 > U_1$. A solução geral para a função de onda do elétron é dada por $\Psi(x,t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\varphi(x)$, onde

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_{\text{I}} = Ae^{-\gamma_1 x} + Be^{+\gamma_1 x}, \ \ \gamma_1^2 = \frac{2m_0(U_1-E)}{\hbar^2}, \ \text{ se } x < 0 \\ \varphi_{\text{II}} = C\cos kx + D\sin kx, \ \ k^2 = \frac{2m_0 E}{\hbar^2}, \ \text{ se } 0 \leq x < L \\ \varphi_{\text{III}} = Fe^{-\gamma_2 x} + Ge^{+\gamma_2 x}, \ \ \gamma_2^2 = \frac{2m_0(U_2-E)}{\hbar^2}, \ \text{ se } x \geq L, \end{cases}$$

A, B, C, D, F e G são constantes reais, e E $(0 < E < U_1)$ é a energia do elétron.

(a) (1,0 ponto) Encontre os valores das constantes A e G. Justifique.

(b) (1,0 ponto) Escreva as condições de continuidade da função de onda e de sua derivada em $x = 0$ e $x = L$.

(c) (1,0 ponto) Determine a probabilidade, P_{III}, de encontrar o elétron na região III, em termos de L, F e γ_2.

Solução da questão 1

(a) A função de onda deve ser finita em todo o espaço. Logo $\boxed{A = G = 0}$.

(b) As condições de continuidade da função de onda e suas derivadas são:

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_{\mathrm{I}}(0) = \varphi_{\mathrm{II}}(0) \Rightarrow B = C \\ \varphi_{\mathrm{II}}(L) = \varphi_{\mathrm{III}}(L) \Rightarrow C\cos(kL) + D\,\mathrm{sen}(kL) = Fe^{-\gamma_2 L} \\ \frac{d\varphi_{\mathrm{I}}}{dx}\big|_{x=0} = \frac{d\varphi_{\mathrm{II}}}{dx}\big|_{x=0} \Rightarrow \gamma_1 B = kD \\ \frac{d\varphi_{\mathrm{II}}}{dx}\big|_{x=L} = \frac{d\varphi_{\mathrm{III}}}{dx}\big|_{x=L} \Rightarrow -kC\,\mathrm{sen}(kL) + kD\cos(kL) = -\gamma_2 F e^{-\gamma_2 L} \end{cases}}$$

(c) $P_{\mathrm{III}} = \int_L^\infty F^2 e^{-2\gamma_2 x} dx \Rightarrow \boxed{P_{\mathrm{III}} = \dfrac{F^2 e^{-2\gamma_2 L}}{2\gamma_2}}$

Questão 2

Uma partícula de massa m encontra-se no estado estacionário cuja função de onda é dada por

$$\Psi(x,t) = Ae^{-(bmx^2)/\hbar}e^{-ibt},$$

com A e b são constantes positivas e reais.

(a) (1,0 ponto) Determine a constante A.

(b) (1,0 ponto) Neste estado, determine a energia E da partícula.

(c) (1,0 ponto) Calcule $\langle x \rangle$ (valor médio da posição x) e $\langle x^2 \rangle$. Usando a relação $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, determine a incerteza Δx. A partir do princípio de incerteza, determine a incerteza mínima para o momento da partícula.

Solução da questão 2

(a) Usando a condição de normalização,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t)\Psi^{\star}(x,t)\mathrm{d}x = 1,$$

teremos

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{2bm}{\hbar}x^2\right]\mathrm{d}x = 1.$$

Usando o resultado (formulário) para integrais gaussianas,

$$|A|^2 \left(\frac{\pi\hbar}{2bm}\right)^{1/2} = 1.$$

Logo,

$$\boxed{A = \left(\frac{2bm}{\pi\hbar}\right)^{1/4} = \left(\frac{4bm}{h}\right)^{1/4}}$$

(b) A função de onda $\Psi(x,t) = Ae^{-(bmx^2)/\hbar}e^{-ibt}$ pode ser escrita como

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar},$$

onde

$\psi(x) = Ae^{-(bmx^2)/\hbar}$,

$e^{-ibt} = e^{-iEt/\hbar}$.

Utilizando a equação acima, a energia E da partícula é

$$-ibt = -\frac{iEt}{\hbar} \Rightarrow \boxed{E = b\hbar}$$

(c)

$$\langle x \rangle = \left(\frac{2bm}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left[-\frac{2bm}{\hbar}x^2\right]\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \boxed{\langle x \rangle = 0}$$

(função impar integrada em intervalo simétrico).

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{2bm}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left[-\frac{2bm}{\hbar}x^2\right]\mathrm{d}x = \left(\frac{2bm}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\hbar}{2bm}\right)^{3/2} = \frac{\hbar}{4bm} \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{4bm}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{bm}} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{bm}}}$$

Usando a relação de incerteza, teremos

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\Delta x} = \sqrt{bm\hbar} \Rightarrow \boxed{\Delta p_x \geq \sqrt{bm\hbar}}.$$

Questão 3

O estado fundamental eletrônico do átomo de hidrogênio (H) é dado pela função de onda $\Psi(r,t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)\varphi(r)$, onde $E = -13.6$ eV,

$$\varphi(r) = \frac{e^{-r/a_B}}{\sqrt{\pi a_B^3}},$$

e $a_B = 0.0529$ nm é o raio de Bohr. Para este estado fundamental,

(a) (1,0 ponto) Calcule a função densidade de propabibilidade radial $P(r)$ de encontrar o elétron em torno do núcleo.

(b) (1,0 ponto) Calcule a distância, medida a partir do centro do núcleo, onde a probabilidade radial de encontrar o elétron é máxima.

(c) (1,0 ponto) No modelo de Bohr, o elétron realiza uma órbita circular de raio a_B e possui momento angular igual a $\hbar$ no estado fundamental. Na mecânica quântica, qual o momento angular orbital do elétron neste mesmo estado, e qual o significado de a_B?

(d) (1,0 ponto) Suponha agora que um elétron realiza uma transição do nível $n = 2$ para o estado fundamental ($n = 1$). Calcule a energia do fóton emitido em Elétron-volt.

Solução da questão 3

(a) A densidade de probabilidade radial $P(r)$ de encontrarmos o elétron a uma distância r do núcleo é dada por:

$$P(r) = 4\pi r^2 \varphi^2(r) \Rightarrow \boxed{P(r) = \frac{4r^2 e^{-2r/a_B}}{a_B^3}}$$

(b)
$$\frac{dP(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{8re^{-2r/a_B}}{a_B^3} + \frac{-8r^2 e^{-2r/a_B}}{a_B^4} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{r}{a_B} = 0 \Rightarrow \boxed{r = a_B}$$

(c) Na mecânica quântica, no estado fundamental do H, o momento angular do elétron é zero, e a_B corresponde à distância entre o elétron e o núcleo onde a densidade de probabilidade radial é máxima.

(d)
$$E = E_2 - E_1 = -\frac{13,6 \text{ eV}}{2^2} + \frac{13,6 \text{ eV}}{1^2} \Rightarrow \boxed{E = 10,2 \text{ eV}}$$

Formulário

$\hbar \approx 1 \times 10^{-34}$J·s, $\quad$ 1eV $= 1,6 \times 10^{-19}$J, $\quad h = 4,2 \times 10^{-15}$ eV · s, $\quad c = 3 \times 10^8$ m/s

$\Delta x \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta t \geq \dfrac{\hbar}{2}, \quad \hbar = h/2\pi$

$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar,\ L_z = m_\ell\,\hbar,\ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar,\ S_z = m_s\,\hbar,$

$\lambda = \dfrac{h}{p}, \quad E_n = -\dfrac{13,6}{n^2}$ eV

$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t), \qquad \Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ onde E é a energia.

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad dV = 4\pi r^2 dr$

$\int_0^d x^2 e^{-x}dx = 2 - (d^2+2d+2)e^{-d}$ e $\int_d^\infty x^2 e^{-x}dx = (d^2+2d+2)e^{-d}$.

$\int \operatorname{sen}^2(ax)dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}, \quad \int x \operatorname{sen}^2(ax)dx = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x\operatorname{sen}(2ax)}{4a} - \dfrac{\cos(2ax)}{8a^2},$

$\int x^2 \operatorname{sen}^2(ax)dx = \dfrac{x^3}{6} - \left(\dfrac{x^2}{4a} - \dfrac{1}{8a^3}\right)\operatorname{sen}(2ax) - \dfrac{x\cos(2ax)}{4a^2}, \quad \int_{-\infty}^0 xe^x dx = -1$

$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\pi}\,\alpha^{-1/2}, \quad \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-3/2}.$

$\int_{-\infty}^\infty xe^{-\alpha x^2}dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$ se $f(-x) = -f(x)$