Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2024

GABARITO DA REC

20 de fevereiro de 2025

Questão 1

Em um experimento de difração, uma onda plana monocromática de comprimento de onda λ incide em um anteparo contendo uma fenda simples de largura a. A figura de difração é observada em uma tela localizada a uma distância L da fenda. Assumindo $L \gg a$ e que os ângulos envolvidos são pequenos, calcule:

(a) (1,0 ponto) a distância aproximada entre o máximo central e o primeiro mínimo secundário da figura de difração.

(b) (1,0 ponto) a distância aproximada entre o máximo central e o primeiro máximo secundário da figura de difração.

(c) (0,5 ponto) a distância aproximada entre o primeiro mínimo e o segundo mínimo da figura de difração.

Solução da questão 1

(a) A intensidade I da figura de difração é dada pela seguinte expressão:

$$I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2,$$

onde

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

Observando as expressões acima, podemos ver que o primeiro mínimo de difração ocorre quando $\beta/2 = \pi$. Considerando a aproximação $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = d/L$, temos:

$$2\pi = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow 1 = \frac{a}{\lambda}\frac{d}{L} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\lambda L}{a}}.$$

(b) O primeiro máximo secundário está localizado aproximadamente no meio entre o primeiro mínimo e o segundo mínimo de difração. O primeiro mínimo ocorre em $y_1 = \lambda L/a$. Para encontrar a posição do segundo mínimo, podemos utilizar:

$$4\pi = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow 2 = \frac{a}{\lambda}\frac{y_2}{L} \Rightarrow y_2 = \frac{2\lambda L}{a}.$$

Logo, a distância entre o máximo central e o primeiro máximo secundário é:

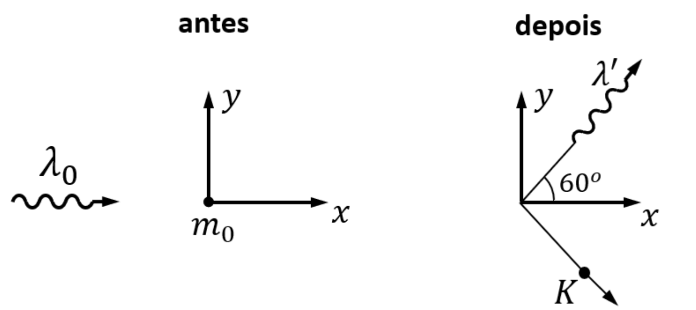
$$d = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\lambda L}{2a} + \frac{2\lambda L}{2a} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3\lambda L}{2a}}$$

(c) A partir das posições dos mínimos secundários calculadas no item anterior, temos:

$$d = y_2 - y_1 = \frac{2\lambda L}{a} - \frac{\lambda L}{a} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\lambda L}{a}}$$

Questão 2

Um fóton com comprimento de onda λ_0 que viaja no sentido de x positivo é espalhado por um elétron em repouso, que possui massa de repouso m_0 e está localizado na posição $x = 0$ antes do espalhamento. Após o espalhamento, o fóton viaja numa certa direção formando um ângulo de $60°$ com o eixo x, conforme ilustra a figura abaixo. Nas questões abaixo, expresse sua resposta em termos de λ_0, m_0, velocidade da luz c, e constante de Planck h.



(a) (1,0 ponto) Calcule o comprimento de onda λ' do fóton espalhado.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia cinética K do elétron espalhado.

(c) (0,5 ponto) Calcule a componente p_y do vetor momento linear do elétron após o espalhamento.

Solução da questão 2

(a) O comprimento de onda λ' do fóton espalhado é obtido através da equação que descreve o espalhamento Compton para $\theta = 60°$:

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{2m_0 c}}.$$

(b) A equação de conservação de energia é:

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + K + m_0 c^2 \Rightarrow K = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda'}\right) \Rightarrow \boxed{K = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0 + h/(2m_0 c)}\right)}$$

(c) A equação de conservação do momento é dada por:

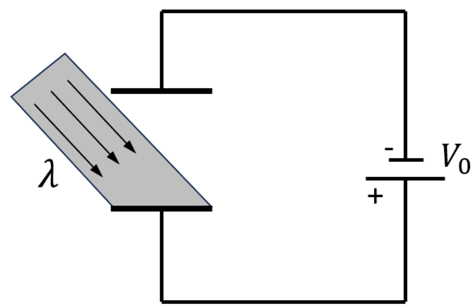
$$\frac{h}{\lambda_0}\hat{i} + 0\hat{j} = (p_x + \frac{h}{\lambda'}\cos 60^o)\hat{i} + (p_y + \frac{h}{\lambda'}\,\mathrm{sen}60^o)\hat{j}.$$

Logo, a componente p_y do vetor momento linear do elétron é:

$$p_y = -\frac{h}{\lambda'}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{p_y = -\frac{\sqrt{3}h}{2\lambda_0 + h/(m_0 c)}}$$

Questão 3

I (1,5 ponto) Em um experimento sobre o efeito fotoelétrico (figura abaixo), uma superfície metálica com função de trabalho $\phi = 1$ eV é iluminada por uma luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 310$ nm e intensidade $I = 10$ W/m^2. Calcule o potencial de corte (ou potencial de freamento) deste experimento, ou seja, qual é o valor de V_0 para que a corrente elétrica se anule.



II (1,0 ponto) Um elétron de um átomo de hidrogênio faz a transição da camada $n = 3$ para $n = 1$. Calcule o comprimento de onda do fóton emitido, expressando sua resposta em termos da constante de Rydberg.

Solução da questão 3

(I) A energia cinética máxima dos elétrons removidos é:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{1240 \text{ eV.nm}}{310 \text{ nm}} - 1 \text{ eV} = 3 \text{ eV}$$

Logo, o potencial de corte é:

$$\boxed{V_0 = 3 \text{ V}}$$

(II) A energia do fóton emitido é:

$$E = E_3 - E_1 = -\frac{hcR_H}{3^2} + \frac{hcR_H}{1^2} = \frac{8hcR_H}{9}$$

Logo, o comprimento de onda do fóton emitido é

$$\lambda = \frac{hc}{E} \Rightarrow \boxed{\frac{9}{8R_H}}$$

Questão 4

Uma partícula de massa m está confinada em um poço de potencial dado por

$$U(x) = \begin{cases} +\infty \ \text{ se } x < 0 \quad \text{(Região I)} \\ 0 \ \text{ se } 0 \leq x \leq L \quad \text{(Região II)} \\ +\infty \ \text{ se } x > L \quad \text{(Região III)}, \end{cases}$$

A partícula se encontra em um estado quântico, onde a função $\psi(x)$ é dada por

$$\psi(x) = A \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

sendo A uma constante real positiva.

(a) (1,0 ponto) Determine o valor de A. Expresse sua resposta em termos de L.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia da partícula neste estado.

(c) (0,5 ponto) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula na região $0 \leq x \leq L/2$.

Solução da questão 1

(a) Aplicando a condição de normalização, temos:

$$\int \psi^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^L A^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 1 \Rightarrow$$

$$A^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 1 \Rightarrow A^2 \left[\frac{L}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{4\pi/L}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}}$$

(b) Substituindo a função de onda na equação de Schrödinger, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left[A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] = EA \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) = E \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}}$$

(c) A probabilidade de encontrar a partícula na região $0 \leq x \leq L/2$ é

$$P = \int \psi^2 dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}}$$

Formulário

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}, \quad hc = 1240 \text{ eV.nm}$$

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\text{sen}\,\theta, \qquad \begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$I = I_0 \cos^2(\phi/2), \quad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\text{sen}\,\theta,$$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1)m_0 c^2, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda$$

$E_n = -hcR_H/n^2,$ onde $hcR_H = 13.6$ eV, $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do <u>fóton</u>,

$$\lambda = h/p, \quad \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6 \times 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}\ ; \quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}\ ;$$

$$\int \text{sen}^2(bx)dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2bx)}{4b}$$